

Асимптотичний розподіл ОНК параметрів квазічирпованого сигналу

В. В. Гладун¹, О. В. Іванов², А. М. Кругол³

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені
Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна,

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-1783-287X>

²Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені
Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна,

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5250-6781>

³Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені
Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна

(¹*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Kyiv, Ukraine*

²*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Kyiv, Ukraine*

³*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Kyiv, Ukraine*)

Abstract

У роботі розглядається неперервний у часі елементарний квазічирпований сигнал, що спостерігається на фоні адитивного сильно або слабо залежного гауссівського випадкового шуму. У якості оцінки невідомих параметрів цього сигналу розглядається оцінка найменших квадратів (ОНК). Було розглянуто асимптотичні властивості ОНК досліджуваного сигналу та отримано теореми про

viktor.hladun00@gmail.com, alexntuu@gmail.com, anya.krugol2001@gmail.com

© 2025 The Author(s). Licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Cite as: Гладун, В. В., & Іванов, О. В., & Кругол, А. М. (2025). Асимптотичний розподіл ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025 (2), 17–53. 10.20535/mmtu-2025.2-017

сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК невідомих параметрів квазічирпованого сигналу.

Keywords: гармонічний сигнал, елементарний чирпований сигнал, сильно/слабко залежний стаціонарний гауссівський процес, оцінка найменших квадратів, рівномірний закон великих чисел, інтеграли Френеля, сильна консистентність, спектральна міра функції регресії, асимптотична нормальність.

MSC2010 62J02, 60G5

UDC 519.21

Вступ

Моделі синусоїдних сигналів, що спостерігаються на фоні випадкових шумів різного походження, широко використовуються в обробці мовних та музичних текстів, у медицині, зокрема, кардіографії, сейсмології, астрономії, теорії передавання сигналів, в економіці та інших галузях. Синусоїдний сигнал можна записати у вигляді

$$X(t) = \sum_{j=1}^M (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \varepsilon(t), \quad M \geq 1; \quad (1)$$

$t \in \mathbb{N}$, якщо розглядається модель з дискретним часом, або $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, якщо модель з неперервним часом спостереження. У запису (1) синусоїдного сигналу A_j^0, B_j^0 є амплітудами, ϕ_j^0 є частотами гармонічних коливань, а стохастичний процес $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ або $t \in \mathbb{R}$, є випадковим шумом, що маскує сигнал.

Задача статистичного оцінювання невідомих параметрів A_j^0, B_j^0, ϕ_j^0 моделі (1) називається проблемою виявлення прихованих періодичностей, що має 200-річну історію та величезну математичну та прикладну бібліографію. Ми пошлемось тільки на роботи ([Artis, Hoffmann, Nachane, & Toro, 2004](#); [A. V. Ivanov, 2010](#); [Quinn & Hannan, 2012](#); [Kundu & Nandi, 2012](#); [A. V. Ivanov, Leonenko, Ruiz-Medina, & Zhurakovsky, 2015](#)), які містять велику кількість посилань на публікації з даної тематики.

Ще однією важливою тригонометричною моделлю в обробці сигналів є, так звана модель чирпованого сигналу (chirp signal model). CHIRP – це абревіатура терміну «Compressed High-Intensity Radiated Pulse», який дослівно перекладається як «Стиснутий Високоінтенсивний Випромінюваний Імпульс», а адекватно – «Лінійна частотна модуляція». Крім цього, англійське слово «chirp» перекладається як «щебет». Сигнали такого типу застосовуються в радіо та ехолокації в якості засобу формування та обробки зондуючого імпульсу. Застосування chirp-сигналу (ми будемо говорити «чирпованого сигналу») дозволяє підвищити точність вимірювань та якість в отриманні зображення та характеристик зондованого об'єкту.

Чирпований сигнал можна записати у наступному вигляді:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{M'} (C_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + D_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad M' \geq 1; \quad (2)$$

час t , як і в моделі (1), може бути дискретним або неперервним. У порівнянні з моделлю (1), тут присутні додаткові параметри ψ_j^0 , які в англійській літературі називаються chirp rates або frequency rates. Ці параметри контролюють швидкість зростання початкових частот коливань ϕ_j^0 .

Для дискретного часу t та випадкового шуму, який є лінійним часовим рядом типу $MA(\infty)$ -процесу, за останні 20 років отримано багато результатів щодо консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) та деяких інших оцінок параметрів сигналу (2). Серед великої кількості робіт на цю тему вкажемо на публікації (Nandi & Kundu, 2004, 2020; Kundu & Nandi, 2008, 2021; Lahiri, 2011; Lahiri, Kundu, & Mitra, 2015).

Для неперервного часу t та випадкового шуму, який є гауссівським стаціонарним процесом з сильною або слабкою залежністю, сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК параметрів моделі (2) доведено у роботах (A. Ivanov & Hladun, 2023, 2024).

У роботі (Grover, Kundu, & Mitra, 2021) розглянуто властивості ОНК параметрів дискретної моделі сигналу, який займає проміжне положення між моделями сигналів (1) та (2). Автори цієї роботи називають модель такого сигналу «chirp-like model», а ми будемо називати такий сигнал квазічирпованим. Математичний запис квазічирпованого сигналу має вигляд

$$X(t) = \sum_{j=1}^M (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \sum_{k=1}^{M'} (C_k^0 \cos(\psi_k^0 t^2) + D_k^0 \sin(\psi_k^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad (3)$$

$M, M' \geq 1$, де $A_j^0, B_j^0, C_k^0, D_k^0$ – амплітуди, ϕ_j^0 – частоти, ψ_k^0 – frequency rates, які ми назвемо темпами частот.

Такий вибір моделі автори вказаної роботи зробили завдяки наступним обставинам. По-перше, стверджується, що модель (3) демонструє такий же тип поведінки, як і модель (2), та здатна моделювати той самий фізичний ефект. По-друге, модель (3) не тільки є альтернативною до моделі (2), але її також можна розглядати як узагальнення моделі (1), якщо покласти $C_k = D_k = 0, k = \overline{1, M'}$.

Кожний доданок 1-ої суми моделі (3) є звичайним гармонічним коливанням, а кожний доданок 2-ої суми моделі (3) може сам по собі входити у, так звану елементарну чирповану модель сигналу

$$X(t) = C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2) + \varepsilon(t), \quad (4)$$

яка розглядалась у роботах (Casazza & Fickus, 2006; Mboup & Adal, 2012).

Задача вивчення статистичних властивостей ОНК параметрів моделі (3) з довільними $M, M' > 1$, є вельми складною, і тому в даній роботі ми розглянемо задачу оцінювання параметрів елементарної квазічирпованої моделі (3) з $M = M' = 1$. Далі буде видно, що і така задача не є простою.

1 Постановка задачі

Нехай спостерігається стохастичний процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

де g є сумою гармонічного коливання та елементарної чирпованої частини, тобто

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2), \quad (6)$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0, \theta_5^0, \theta_6^0)^* = (A^0, B^0, \phi^0, C^0, D^0, \psi^0)^*, \quad (7)$$

де "*" є знаком транспонування, $(A^0)^2 + (B^0)^2 > 0$, $(C^0)^2 + (D^0)^2 > 0$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$, є випадковим шумом, визначеним на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Припустимо, що

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський стохастичний процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, що задовольняє одній з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

Припустимо також, що істинні значення амплітуд (A^0, B^0, C^0, D^0) є різними числами, а істинні значення кутової частоти та темпу частоти (ϕ^0, ψ^0) є різними додатними числами. Для деяких фіксованих чисел $0 < \underline{\phi} < \bar{\phi} < +\infty$; $0 < \underline{\psi} < \bar{\psi} < +\infty$, нехай $\phi^0 \in (\underline{\phi}, \bar{\phi})$, $\psi^0 \in (\underline{\psi}, \bar{\psi})$.

Означення 1. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_T, B_T, \phi_T, C_T, D_T, \psi_T), \quad (8)$$

що мінімізує значення функціоналу

$$Q_T(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt \quad (9)$$

на параметричній множині $\Theta \subset \mathbb{R}^6$, де амплітуди (A, B, C, D) можуть приймати будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $[\underline{\phi}, \bar{\phi}] \times [\underline{\psi}, \bar{\psi}]$, називається ОНК параметра θ^0 .

У розділі 2 ми доводимо, що так означена ОНК θ_T векторного параметра θ^0 моделі (5)-(7) є сильно консистентною у деякому сенсі (теорема 1). У розділі 3 ми покажемо, що ОНК θ_T є асимптотично нормальною оцінкою параметра θ^0 (теорема 2), причому доведення цього факту є достатньо громіздким та вимагає додаткових умов, яким повинен задовольняти стохастичний процес ε .

2 Сильна консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу

Сформулюємо теорему, яка є основним результатом цього розділу.

Теорема 1. Нехай виконується умова **A1**. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 у тому сенсі, що $A_T \rightarrow A^0$, $B_T \rightarrow B^0$, $T(\phi_T - \phi^0) \rightarrow 0$, $C_T \rightarrow C^0$, $D_T \rightarrow D^0$, $T^2(\psi_T - \psi^0) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.

Для доведення теореми 1 нам знадобляться дві леми.

Лема 1. Нехай $\alpha_T, \beta_T, T > 0$ – деякі функції, такі, що $\alpha_T \rightarrow \infty$, $\beta_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Тоді при $T \rightarrow \infty$

$$1) \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(\alpha_T t) dt \rightarrow 0; \quad 2) \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(\beta_T t^2) dt \rightarrow 0;$$

$$3) \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(\alpha_T t) \frac{\cos}{\sin}(\beta_T t^2) dt \rightarrow 0.$$

Доведення. Маємо

$$1) \left| \int_0^1 \sin(\alpha_T t) dt \right| = \left| \frac{1 - \cos(\alpha_T)}{\alpha_T} \right| \leq \frac{2}{|\alpha_T|} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty;$$

$$\left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t) dt \right| = \left| \frac{\sin(\alpha_T)}{\alpha_T} \right| \leq \frac{1}{|\alpha_T|} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

$$2) \text{ З властивостей інтегралів Френеля } C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \\ x \in \mathbb{R}, \text{ випливає, що} \\ \left| \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(\beta_T t^2) dt \right| = \int_0^1 \frac{\cos}{\sin}(|\beta_T| t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{|\beta_T|}} \left| \int_0^{\sqrt{|\beta_T|}} \frac{\cos}{\sin}(t^2) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|\beta_T|}} \rightarrow 0 \\ \text{при } T \rightarrow \infty.$$

$$3) \text{ Оскільки усі чотири випадки у 3) доводяться аналогічно, запишемо} \\ \text{доведення одного з них.} \\ \left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t) \cos(\beta_T t^2) dt \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \right| + \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t - \beta_T t^2) dt \right| \\ \leq \frac{4}{\sqrt{|\beta_T|}} \rightarrow 0, \text{ при } T \rightarrow \infty, \text{ де остання нерівність є результатом леми 1 у} \\ \text{роботі (A. Ivanov \& Hladun, 2023).}$$

□

Лема 2. Якщо виконується умова **A1**, то при $T \rightarrow \infty$

$$\sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos}{\sin}(\phi t) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.} \quad (10)$$

$$\sup_{\psi \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos}{\sin}(\psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.} \quad (11)$$

Доведення. У роботі (A. Ivanov & Hladun, 2023) було доведено, що

$$\sup_{\phi, \psi \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos}{\sin} (\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Збіжності (10) та (11) є частинними випадками (12), і можуть бути отримані, якщо взяти у (12) $\phi = 0$ або $\psi = 0$, відповідно. $\square$

Доведення теореми 1. Продиференціюємо функціонал $Q_T(\theta)$ за змінними A, B, C, D :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial A} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \cos(\phi t) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial B} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \sin(\phi t) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial C} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \cos(\psi t^2) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial D} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \sin(\psi t^2) dt = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, отримуємо систему лінійних рівнянь для оцінок (A_T, B_T, C_T, D_T) , що є підсистемою системи нормальних рівнянь для ОНК θ_T :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \langle \cos(\phi_T t), \cos(\phi_T t) \rangle & \langle \sin(\phi_T t), \cos(\phi_T t) \rangle & \langle \cos(\psi_T t^2), \cos(\phi_T t) \rangle & \langle \sin(\psi_T t^2), \cos(\phi_T t) \rangle \\ \langle \cos(\phi_T t), \sin(\phi_T t) \rangle & \langle \sin(\phi_T t), \sin(\phi_T t) \rangle & \langle \cos(\psi_T t^2), \sin(\phi_T t) \rangle & \langle \sin(\psi_T t^2), \sin(\phi_T t) \rangle \\ \langle \cos(\phi_T t), \cos(\psi_T t^2) \rangle & \langle \sin(\phi_T t), \cos(\psi_T t^2) \rangle & \langle \cos(\psi_T t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle & \langle \sin(\psi_T t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle \\ \langle \cos(\phi_T t), \sin(\psi_T t^2) \rangle & \langle \sin(\phi_T t), \sin(\psi_T t^2) \rangle & \langle \cos(\psi_T t^2), \sin(\psi_T t^2) \rangle & \langle \sin(\psi_T t^2), \sin(\psi_T t^2) \rangle \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle X(T), \cos(\phi_T t) \rangle \\ \langle X(T), \sin(\phi_T t) \rangle \\ \langle X(T), \cos(\psi_T t^2) \rangle \\ \langle X(T), \sin(\psi_T t^2) \rangle \end{bmatrix} = M_T Y_T = X_T, \end{aligned} \quad (14)$$

де використано позначення $\langle u(t), v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)v(t)dt$.

Із леми 1 випливає, що

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де символом $o_T(1)$ позначено випадкові процеси, що прямують до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$.

Розглянемо далі координати вектора X_T . Будемо використовувати позначення

$$a_T = \frac{\sin T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)}, \quad b_T = \frac{1 - \cos T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)},$$

$$x_T = \int_0^1 \cos(T^2(\psi^0 - \psi_T)t^2) dt, \quad y_T = \int_0^1 \sin(T^2(\psi^0 - \psi_T)t^2) dt. \quad (16)$$

Маємо

$$\begin{aligned} X_T^{(1)} = & \langle \varepsilon(t), \cos(\phi_T t) \rangle + A^0 \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle \\ & + B^0 \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle + C^0 \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle \\ & + D^0 \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Перший доданок у (17) прямує до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$ за лемою 2. Далі, з леми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle = & \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\phi^0 - \phi_T)t) dt \\ & + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\phi^0 + \phi_T)t) dt = \frac{a_T}{2} + o_T(1); \\ \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle = & \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\phi^0 - \phi_T)t) dt \\ & + \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\phi^0 + \phi_T)t) dt = \frac{b_T}{2} + o_T(1); \\ \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle = & o_T(1); \quad \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle = o_T(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином,

$$X_T^{(1)} = \frac{A^0}{2} a_T + \frac{B^0}{2} b_T + o_T(1). \quad (19)$$

Аналогічно,

$$X_T^{(2)} = \frac{B^0}{2} a_T - \frac{A^0}{2} b_T + o_T(1). \quad (20)$$

Крім цього,

$$\begin{aligned} X_T^{(3)} = & \langle \varepsilon(t), \cos(\psi_T t^2) \rangle + A^0 \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle \\ & + B^0 \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle + C^0 \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle \\ & + D^0 \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Перший доданок у (21) прямує до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$ за лемою 2. З леми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\psi^0 - \psi_T)t^2) dt \\ &\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\psi^0 + \psi_T)t^2) dt = \frac{x_T}{2} + o_T(1); \\ \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\psi^0 - \psi_T)t^2) dt \\ &\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\psi^0 + \psi_T)t^2) dt = \frac{y_T}{2} + o_T(1); \\ \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= o_T(1); \quad \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle = o_T(1). \end{aligned} \quad (22)$$

З (21) та (22) отримуємо

$$X_T^{(3)} = \frac{C^0}{2} x_T + \frac{D^0}{2} y_T + o_T(1). \quad (23)$$

Аналогічно

$$X_T^{(4)} = \frac{D^0}{2} x_T - \frac{C^0}{2} y_T + o_T(1). \quad (24)$$

Застосовуючи співвідношення (15), (19), (20), (23), (24) до системи рівнянь (14), отримуємо такі вирази для ОНК амплітуд:

$$\begin{aligned} A_T &= A^0 a_T + B^0 b_T + o_T(1); \quad B_T = B^0 a_T - A^0 b_T + o_T(1); \\ C_T &= C^0 x_T + D^0 y_T + o_T(1); \quad D_T = D^0 x_T - C^0 y_T + o_T(1). \end{aligned} \quad (25)$$

Оскільки, $|a_T|, |b_T|, |x_T|, |y_T| \leq 1$, з (25) випливає, що

$$\begin{aligned} |A_T| &\leq |A^0| + |B^0| + o_T(1); \quad |B_T| \leq |A^0| + |B^0| + o_T(1); \\ |C_T| &\leq |C^0| + |D^0| + o_T(1); \quad |D_T| \leq |C^0| + |D^0| + o_T(1); \end{aligned} \quad (26)$$

Нехай,

$$G(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{T} \int_0^T (g(t, \theta_1) - g(t, \theta_2))^2 dt, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta.$$

З означення ОНК випливає, що

$$0 \geq Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = G(\theta_T, \theta^0) + \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) [g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)] dt. \quad (27)$$

З леми 2 та нерівностей (26) маємо, що:

$$2T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) [g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)] dt \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Отже, враховуючи (28), з (27) отримуємо

$$G_T(\theta_T, \theta^0) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Перетворимо інтеграл

$$G_T(\theta_T, \theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T [A_T \cos(\phi_T t) + B_T \sin(\phi_T t) + C_T \cos(\psi_T t^2) + D_T \sin(\psi_T t^2) - A^0 \cos(\phi^0 t) - B^0 \sin(\phi^0 t) - C^0 \cos(\psi^0 t^2) - D^0 \sin(\psi^0 t^2)]^2 dt. \quad (30)$$

Користуючись нерівностями (26) та лемою 1, отримуємо

$$\begin{aligned} G_T(\theta_T, \theta^0) &= (A_T)^2 < \cos(\phi_T t), \cos(\phi_T t) > + (B_T)^2 < \sin(\phi_T t), \sin(\phi_T t) > \\ &+ (C_T)^2 < \cos(\psi_T t^2), \cos(\psi_T t^2) > + (D_T)^2 < \sin(\psi_T t^2), \sin(\psi_T t^2) > \\ &- 2A_T A^0 < \cos(\phi_T t), \cos(\phi^0 t) > - 2A_T B^0 < \cos(\phi_T t), \sin(\phi^0 t) > \\ &- 2B_T A^0 < \sin(\phi_T t), \cos(\phi^0 t) > - 2B_T B^0 < \sin(\phi_T t), \sin(\phi^0 t) > \\ &- 2C_T C^0 < \cos(\psi_T t^2), \cos(\psi^0 t^2) > - 2C_T D^0 < \cos(\psi_T t^2), \sin(\psi^0 t^2) > \\ &- 2D_T C^0 < \sin(\psi_T t^2), \cos(\psi^0 t^2) > - 2D_T D^0 < \sin(\psi_T t^2), \sin(\psi^0 t^2) > + o_T(1) \\ &= \frac{1}{2} [(A_T)^2 + (B_T)^2 + (A^0)^2 + (B^0)^2] - [A_T A^0 + B_T B^0] a_T - [A_T B^0 - B_T A^0] b_T \\ &+ \frac{1}{2} [(C_T)^2 + (D_T)^2 + (C^0)^2 + (D^0)^2] - [C_T C^0 + D_T D^0] x_T - [C_T D^0 - D_T C^0] y_T + o_T(1). \end{aligned} \quad (31)$$

Підставимо рівності (25) у (31):

$$\begin{aligned} G_T(\theta_T, \theta^0) &= \frac{1}{2} ((A^0)^2 + (B^0)^2) (1 - a_T^2 - b_T^2) \\ &+ \frac{1}{2} ((C^0)^2 + (D^0)^2) (1 - x_T^2 - y_T^2) + o_T(1) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Оскільки, $a_T^2 + b_T^2 \leq 1$, $x_T^2 + y_T^2 \leq 1$, то (29) прямуватиме до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$a_T^2 + b_T^2 \rightarrow 1, \quad x_T^2 + y_T^2 \rightarrow 1 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Дослідимо детальніше кожну з величин у (33). Отримуємо

$$a_T^2 + b_T^2 = \left(\frac{\sin T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{T}{2}(\phi^0 - \phi_T)}{\frac{T}{2}(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2.$$

Отже, для того, щоб виконувалось $a_T^2 + b_T^2 \rightarrow 1$, необхідно і достатньо, щоб

$$T(\phi^0 - \phi_T) \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Маємо далі

$$x_T^2 + y_T^2 = \left(\int_0^1 \cos(\mu_T t^2) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 \sin(\mu_T t^2) dt \right)^2, \text{ де } \mu_T = T^2(\psi^0 - \psi_T). \quad (35)$$

Нехай $\Omega_0 \in \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, є деякою випадковою подією, для якої справедливий результат $x_T^2 + y_T^2 \rightarrow 1$ м.н. при $T \rightarrow \infty$. Якщо для будь-якої елементарної події $\omega \in \Omega_0$

$$\mu_T \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty, \quad (36)$$

тоді величина $x_T^2 + y_T^2$ прямуватиме до 1 м.н. при $T \rightarrow \infty$ за т. Лебега про мажоровану збіжність.

Припустимо, що (36) не виконується для деякого $\omega_0 \in \Omega_0$ і розглянемо усі можливі варіанти поведінки випадкової величини μ_T .

Нехай, для деякого $\omega_0 \in \Omega$, $\mu_T \nrightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ і послідовність $T_n, n \geq 1$, $T_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, така, що $|\mu_{T_n}| \geq \varepsilon_0, n \geq 1$. Нехай множина значень $\{\mu_{T_n}, n \geq 1\}$ є обмеженою, тоді існує підпослідовність $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$ така, що $\mu_{T_{n_k}} \rightarrow \mu \neq 0$ при $k \rightarrow \infty$. Якщо ж множина значень $\{\mu_{T_n}, n \geq 1\}$ є необмеженою, тоді для деякої підпослідовності $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$ $\mu_{T_{n_k}} \rightarrow +\infty$ або $-\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Позначимо $\mu_{T_{n_k}} = \mu_k$, $x_{T_{n_k}} = x_k$, $y_{T_{n_k}} = y_k$, і, використовуючи попередні виклади, визначимо можливі варіанти збіжності μ_k при $k \rightarrow \infty$.

- (i) $\mu_k \rightarrow +\infty$ або $-\infty$; (ii) $\mu_k \rightarrow \mu \neq 0$.

Покажемо, що для варіантів (i) та (ii)

$$x_k^2 + y_k^2 \nrightarrow 1 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Справді,

$$\begin{aligned} x_k^2 + y_k^2 &= \left(\int_0^1 \cos(\mu_k t^2) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 \sin(\mu_k t^2) dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \cos(|\mu_k| t^2) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 \sin(|\mu_k| t^2) dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{|\mu_k|} \left(\int_0^{\sqrt{|\mu_k|}} \cos(s^2) ds \right)^2 + \frac{1}{|\mu_k|} \left(\int_0^{\sqrt{|\mu_k|}} \sin(s^2) ds \right)^2 \leq \frac{2}{|\mu_k|}, \end{aligned} \quad (38)$$

звідки випливає, що для варіанту (i) виконується (37).

У випадку (ii) за т. Лебега про мажоровану збіжність та за нерівністю Коші-Буняковського матимемо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) = \left(\int_0^1 \cos(\mu t^2) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 \sin(\mu t^2) dt \right)^2 \leq 1, \quad (39)$$

і рівність буде досягатися тоді і тільки тоді, коли для деяких сталих m_1 та m_2 $\cos(\mu t^2) = m_1$, $\sin(\mu t^2) = m_2$, $t \in [0, 1]$. Однак, це неможливо, і тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) < 1. \quad (40)$$

Таким чином, отримуємо

$$\mu_T = T^2(\psi^0 - \psi_T) \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Зі співвідношень (25), (34), (41) випливає консистентність оцінок A_T , B_T , C_T , D_T . $\square$

3 Асимптотична нормальність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу

Зробимо додаткове припущення

A2. (i) Процес ε , що задовольняє умову **A1**(i), має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) |\lambda|^{\alpha-1}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, де $\tilde{L}$ є повільно змінною на нескінченності функцією, і f має 4-й спектральний момент.

(ii) Спектральна щільність процесу ε , що задовольняє умові **A1**(ii), має 4-й спектральний момент.

У роботі (A. Ivanov & Hladun, 2024) наведено приклад одночасного виконання умов **A1** та **A2**.

У цьому розділі отримано другий основний результат роботи.

Теорема 2. Нехай виконуються умови **A1** та **A2**. Тоді нормована ОНК

$$\left(T^{\frac{1}{2}}(A_T - A^0), T^{\frac{1}{2}}(B_T - B^0), T^{\frac{3}{2}}(\phi_T - \phi^0), T(C_T - C^0), T(D_T - D^0), T^3(\psi_T - \psi^0) \right)^*$$

є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $T \rightarrow \infty$, де Σ є матрицею 6 порядку, що задана формулами (112)-(114), а також (85), (86) та (81).

Доведенню теореми 2 передують важливі леми, які будуть сформульовані після того, як ми їх доведемо.

Позначимо

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta) = g_i(t, \theta), \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} g(t, \theta) = g_{ij}(t, \theta), \quad i, j = \overline{1, 6}. \quad (42)$$

Запишемо систему нормальних рівнянь для θ_T :

$$0 = Q'_T(\theta_T) = \left(-2 \int_0^T [X(t) - g(t, \theta_T)] g_i(t, \theta_T) dt \right)_{i=1}^6, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} g_1(t, \theta) &= \cos(\phi t); & g_2(t, \theta) &= \sin(\phi t); \\ g_3(t, \theta) &= -At \sin(\phi t) + Bt \cos(\phi t); \\ g_4(t, \theta) &= \cos(\psi t^2); & g_5(t, \theta) &= \sin(\psi t^2); \\ g_6(t, \theta) &= -Ct^2 \sin(\psi t^2) + Dt^2 \cos(\psi t^2). \end{aligned}$$

Зауваження. У данному розділі ми використовуємо таке ж значення $Q_T(\theta)$, як і у формулі (9), але без нормувального множника $\frac{1}{T}$.

Розглянемо матрицю Гессе

$$Q''_T(\theta) = \left(-2 \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] g_{ij}(t, \theta) dt + 2 \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt \right)_{i,j=1}^6 \quad (44)$$

та розклад кожного рядка (44) в ряд Тейлора зі своїм значенням $\bar{\theta}$ у кожному рядку:

$$-\frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) = \frac{1}{2} Q'_T(\theta_T) - \frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) = \frac{1}{2} Q''_T(\bar{\theta})(\theta_T - \theta^0). \quad (45)$$

Введемо діагональну матрицю

$$d_T = \text{diag}(T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{3}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{5}{2}}). \quad (46)$$

Тоді співвідношення (45) можна переписати у вигляді

$$d_T(\theta_T - \theta^0) = \left(d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q''_T(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \right)^{-1} d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) \right). \quad (47)$$

Дослідимо спочатку асимптотичну поведінку матриці

$$\begin{aligned} d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q''_T(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} &= d_T^{-1} \left(\int_0^T [g(t, \bar{\theta}) - g(t, \theta^0)] g_{ij}(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} \\ &\quad - d_T^{-1} \left(\int_0^T \varepsilon(t) g_{ij}(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} + d_T^{-1} \left(\int_0^T g_i(t, \bar{\theta}) g_j(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} \\ &= J^{(1)} - J^{(2)} + J^{(3)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Покажемо, що при $T \rightarrow \infty$ матриці $J^{(1)}$ та $J^{(2)}$ збігаються до нульової матриці м.н. Розглянемо матрицю

$$d_T^{-1} (g_{ij}(t, \bar{\theta})) d_T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-t \sin(\bar{\phi}t)}{T^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t \cos(\bar{\phi}t)}{T^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t \sin(\bar{\phi}t)}{T^2} & \frac{t \cos(\bar{\phi}t)}{T^2} & \frac{-t^2 (\bar{A} \cos(\bar{\phi}t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi}t))}{T^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-t^2 \sin(\bar{\psi}t^2)}{T^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2 \cos(\bar{\psi}t^2)}{T^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t^2 \sin(\bar{\psi}t^2)}{T^3} & \frac{t^2 \cos(\bar{\psi}t^2)}{T^3} & \frac{-t^4 (\bar{C} \cos(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \sin(\bar{\psi}t^2))}{T^5} \end{bmatrix} \quad (49)$$

З теореми 1 випливає, що для $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |g(t, \bar{\theta}) - g(t, \theta^0)| &= |\bar{A} \cos(\bar{\phi}t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{C} \cos(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \sin(\bar{\psi}t^2) \\ &\quad - A^0 \cos(\phi^0 t) - B^0 \sin(\phi^0 t) - C^0 \cos(\psi^0 t^2) - D^0 \sin(\psi^0 t^2)| \\ &\leq |(\bar{A} - A^0) \cos(\bar{\phi}t) + (\bar{B} - B^0) \sin(\bar{\phi}t) + A^0 (\cos(\bar{\phi}t) - \cos(\phi^0 t)) \\ &\quad + B^0 (\sin(\bar{\phi}t) - \sin(\phi^0 t))| + |(\bar{C} - C^0) \cos(\bar{\psi}t^2) + (\bar{D} - D^0) \sin(\bar{\psi}t^2) \\ &\quad + C^0 (\cos(\bar{\psi}t^2) - \cos(\psi^0 t^2)) + D^0 (\sin(\bar{\psi}t^2) - \sin(\psi^0 t^2))| \\ &\leq |\bar{A} - A^0| + |\bar{B} - B^0| + (|A^0| + |B^0|)|\bar{\phi} - \phi^0|t + |\bar{C} - C^0| + |\bar{D} - D^0| + |\bar{\psi} - \psi^0|t^2 \\ &\leq |A_T - A^0| + |B_T - B^0| + (|A^0| + |B^0|)|\phi_T - \phi^0|T + |C_T - C^0| + |D_T - D^0| + |\psi_T - \psi^0|T^2 \\ &= u_T \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (50)$$

Маємо далі

$$\left| J_{13}^{(1)} \right| \leq \frac{u_T}{2}; \quad \left| J_{23}^{(1)} \right| \leq \frac{u_T}{2}; \quad \left| J_{46}^{(1)} \right| \leq \frac{u_T}{3}; \quad \left| J_{56}^{(1)} \right| \leq \frac{u_T}{3};$$

$$\begin{aligned} \left| J_{33}^{(1)} \right| &\leq \frac{u_T}{T^3} \int_0^T t^2 |\bar{A} \cos(\bar{\phi}t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi}t)| dt \\ &= \frac{u_T}{T^3} \int_0^T t^2 |(\bar{A} - A^0) \cos(\bar{\phi}t) + (\bar{B} - B^0) \sin(\bar{\phi}t) + A^0 \cos(\bar{\phi}t) + B^0 \sin(\bar{\phi}t)| dt \\ &\leq \frac{1}{3} (|A_T - A^0| + |B_T - B^0| + |A^0| + |B^0|) u_T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_{66}^{(1)}| &\leq \frac{u_T}{T^5} \int_0^T t^4 |\overline{C} \cos(\overline{\psi}t^2) + \overline{D} \sin(\overline{\psi}t^2)| dt \\
 &= \frac{u_T}{T^5} \int_0^T t^4 |(\overline{C} - C^0) \cos(\overline{\psi}t^2) + (\overline{D} - D^0) \sin(\overline{\psi}t^2) + C^0 \cos(\overline{\psi}t^2) + D^0 \sin(\overline{\psi}t^2)| dt \\
 &\leq \frac{1}{5} (|C_T - C^0| + |D_T - D^0| + |C^0| + |D^0|) u_T. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Усі інші елементи матриці $J^{(1)}$ дорівнюють нулю. Тому з (51) випливає, що

$$J^{(1)} \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Розглянемо далі матрицю $J^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
 |J_{13}^{(2)}| &= \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t \sin(\overline{\phi}t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t (\sin(\overline{\phi}t) - \sin(\phi^0 t)) dt \right| \\
 &\quad + \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t \sin(\phi^0 t) dt \right| = I_1(T) + I_2(T); \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$I_1(T) \leq \frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt \cdot |\phi_T - \phi^0| T,$$

де другий множник прямує до нуля при $T \rightarrow \infty$ за теоремою 1.

З умови **A1** випливає, що

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right) \rightarrow \frac{1}{2} (1 + B(0))$$

м.н. при $T \rightarrow \infty$, тому $I_1(T) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.

З іншого боку, за умови **A1(i)** маємо

$$\begin{aligned}
 EI_2^2(T) &= T^{-4} \int_0^T \int_0^T ts B(t-s) \sin(\phi^0 t) \sin(\phi^0 s) dt ds \leq \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(t-s) dt ds \\
 &= \int_0^T \int_0^T B(T(t-s)) dt ds = \int_{-1}^1 (1-|t|) B(Tt) dt \leq 2 \int_0^1 B(Tt) dt \leq \frac{2}{1-\alpha} B(T).
 \end{aligned}$$

Покладемо $T_n = n^\beta$, де $\beta\alpha > 1$. Тоді $I_2(T_n) \rightarrow 0$ м.н. при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} |I_2(T) - I_2(T_n)| \leq \left(\left(\frac{T_{n+1}}{T_n} \right)^2 - 1 \right) I_2(T_n) + I_3(T_n),$$

$$I_3(T_n) = \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t)| dt.$$

Оскільки,

$$EI_3^2(T_n) \leq \frac{1}{T_n^2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} E|\varepsilon(t)\varepsilon(s)|dtds \leq B(0) \left(\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \right)^2 = O(n^{-2}),$$

то $I_3(T_n) \rightarrow 0$ м.н. при $n \rightarrow \infty$, а, отже, $J_{13}^{(2)} \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.

За умови **A1(ii)** також отримуємо, що $J_{13}^{(2)} \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$. Доведення цього факту аналогічно попередньому, беручи до уваги співвідношення

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)|dtds = O(T^{-1}).$$

Аналогічно до $J_{13}^{(2)}$ отримуємо, що також $J_{23}^{(2)}, J_{46}^{(2)}, J_{56}^{(2)} \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.

Оскільки доведення того факту, що елементи $J_{33}^{(2)}$ та $J_{66}^{(2)}$ збігаються до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$ є аналогічним, доведемо це лише для елемента $J_{66}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} |J_{66}^{(2)}| &= \left| \frac{1}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t)t^4 [(\bar{C} - C^0) \cos(\bar{\psi}t^2) + (\bar{D} - D^0) \sin(\bar{\psi}t^2) \right. \\ &\quad + C^0 (\cos(\bar{\psi}t^2) - \cos(\psi^0 t^2)) + D^0 (\sin(\bar{\psi}t^2) - \sin(\psi^0 t^2)) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) \\ &\quad \left. + D^0 \sin(\psi^0 t^2)] dt \right| \leq [|C_T - C^0| + |D_T - D^0| + (|C^0| + |D^0|) |\psi_T - \psi^0| T^2] \\ &\quad \times \frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)|dt + \left| \frac{C^0}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t)t^4 \cos(\psi^0 t^2)dt \right| + \left| \frac{D^0}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t)t^4 \sin(\psi^0 t^2)dt \right|, \quad (54) \end{aligned}$$

де перший доданок прямує до нуля м.н. за теоремою 1; збіжність м.н. до нуля другого та третього доданків доводиться аналогічно до збіжності $I_2(T)$. Отже,

$$J^{(2)} \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Далі розглянемо матрицю $J^{(3)}$. З теореми 1 отримуємо, що (див. (A. Ivanov & Hladun, 2024))

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J^{(3)} = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T^{-1} \left(\int_0^T g_i(t, \bar{\theta}) g_j(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T^{-1} J^{(3)}(\theta^0),$$

$$J_{11}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\phi^0 t) dt,$$

$$J_{12}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\phi^0 t) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(2\phi^0 t) dt,$$

$$\begin{aligned}
 J_{13}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\phi^0 t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt \\
 &= -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{4} + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(2\phi^0 t) dt, \\
 J_{22}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\phi^0 t) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{23}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\phi^0 t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt \\
 &= -\frac{A^0}{4} + \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(2\phi^0 t) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{33}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T (-A^0 t \sin(\phi^0 t) + B^0 t \cos(\phi^0 t))^2 dt \\
 &= \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{6} - \frac{(A^0)^2}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\phi^0 t) dt \\
 &\quad - \frac{A^0 B^0}{T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\phi^0 t) dt; \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{41}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \cos(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{42}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt; ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{43}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt \\
 &= -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
 \end{aligned}$$

$$J_{51}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) \cos(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\ - \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,$$

$$J_{52}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt \\ - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt,$$

$$J_{53}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt \\ = -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\ + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,$$

$$J_{61}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) \cos(\phi^0 t) dt \\ = -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt \\ + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,$$

$$J_{62}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) \sin(\phi^0 t) dt \\ = -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\ + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,$$

$$\begin{aligned}
 J_{63}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^4} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) t (-A^0 \sin(\phi^0) + B^0 \cos(\phi^0)) dt \\
 &= \frac{A^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad - \frac{A^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad - \frac{B^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt \\
 &\quad + \frac{B^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt; \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$J_{44}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\psi^0 t^2) dt,$$

$$J_{45}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \sin(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(2\psi^0 t^2) dt,$$

$$\begin{aligned}
 J_{46}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt \\
 &= -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{6} + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\psi^0 t^2) dt,
 \end{aligned}$$

$$J_{55}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\psi^0 t^2) dt,$$

$$\begin{aligned}
 J_{56}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt \\
 &= -\frac{C^0}{6} + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\psi^0 t^2) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{66}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^5} \int_0^T (-C^0 t^2 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 t^2 \cos(\psi^0 t^2))^2 dt \\
 &= \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{10} - \frac{(C^0)^2}{2T^5} \int_0^T t^4 \cos(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^5} \int_0^T t^4 \cos(2\psi^0 t^2) dt \\
 &\quad - \frac{C^0 D^0}{T^5} \int_0^T t^4 \sin(2\psi^0 t^2) dt. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, можна показати, що для $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^T t^n \frac{\cos}{\sin}(\alpha t) dt = O(T^n), \quad t \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Далі з властивостей інтегралів Френеля отримуємо, що для $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (див. (A. Ivanov & Hladun, 2023))

$$\left| \int_0^T \frac{\cos}{\sin}(\alpha t + \beta t^2) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{|\beta|}}. \quad (60)$$

З формули 2.655 таблиць інтегралів (Gradshteyn & Ryzhik, 2014) випливає, що для $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T t^n \frac{\cos}{\sin}(\alpha t + \beta t^2) dt = O(T^{n-1}), \quad T \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Таким чином, застосовуючи формули (59)-(61) до (56)-(58), можемо сформулювати наступну лему.

Лема 3. Якщо виконується умова **A1**, то

$$d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \rightarrow H \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty, \quad (62)$$

де $H = \text{diag}(H_1, H_2)$ – блочно-діагональна матриця з блоками

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{3} \end{bmatrix}; \quad H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{D^0}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{C^0}{3} \\ \frac{D^0}{3} & -\frac{C^0}{3} & \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{5} \end{bmatrix}.$$

Введемо діагональну матрицю

$$s_T = \text{diag} \left(1, 1, 1, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{3}{2}} \right). \quad (63)$$

Розглянемо гауссівський випадковий вектор $s_T d_T^{-1} \left(-\frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) \right) = \xi_T$,

$$\begin{aligned} \xi_T = & \left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) \cos(\phi^0 t) dt, \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) \sin(\phi^0 t) dt, \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) \right. \\ & + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt, \int_0^T \varepsilon(t) \cos(\psi^0 t^2) dt, \int_0^T \varepsilon(t) \sin(\psi^0 t^2) dt, \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) \\ & \left. + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt \right)^* = (\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5, \xi_T^6)^*. \quad (64) \end{aligned}$$

Позначимо $W_T = (W_{ij,T})_{i,j=1}^6 = E\xi_T \xi_T^*$ коваріаційну матрицю вектора ξ_T . Розділимо коваріаційну матрицю W_T на блоки розмірності 3×3 наступним чином

$$W_T = \begin{bmatrix} W_T^{(11)} & W_T^{(12)} \\ W_T^{(21)} & W_T^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

де $W_T^{(11)} = E\xi_T^{(1)} (\xi_T^{(1)})^*$, $W_T^{(22)} = E\xi_T^{(2)} (\xi_T^{(2)})^*$ – коваріаційні матриці векторів $\xi_T^{(1)} = (\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3)$ і $\xi_T^{(2)} = (\xi_T^4, \xi_T^5, \xi_T^6)$, відповідно $W_T^{(12)} = (W_T^{(21)})^* = E\xi_T^{(1)} (\xi_T^{(2)})^*$ – взаємні коваріаційні матриці векторів $\xi_T^{(1)}$ і $\xi_T^{(2)}$.

Для знаходження граничного розподілу ОНК $\hat{\theta}_T$ нам потрібно дослідити граничну при $T \rightarrow \infty$ поведінку матриці W_T .

1) Блок $W_T^{(11)}$.

Нехай $\tilde{g}(t, \theta)$, $(t, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, є деякою неперервно диференційованою функцією на Θ .

Введемо сім'ю матричних мір $\mu_T(d\lambda, \theta)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, де $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}$ з матричними щільностями $(\mu_T^{jl})_{j,l=1}^q$.

$$\mu_T^{jl}(\lambda\theta) = \tilde{g}_T^j(\lambda\theta) \tilde{g}_T^l(\lambda\theta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_T^j(\lambda\theta)|^2 d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_T^l(\lambda\theta)|^2 d\lambda \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{g}_T^j(\lambda\theta) = \int_0^T e^{i\lambda t} \tilde{g}_j(t, \theta) dt, \quad \tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}(t, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j, l = \overline{1, q}. \quad (66)$$

Позначимо

$$\tilde{d}_T^2(\theta) = \text{diag} \left(\tilde{d}_{iT}^2(\theta) \right)_{i=1}^q, \quad \tilde{d}_{iT}^2(\theta) = \int_0^T \tilde{g}_i^2(t, \theta) dt, \quad i = \overline{1, q}. \quad (67)$$

Зауважимо, що за тотожністю Планшереля

$$\tilde{d}_{jT}^2(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}^j(\lambda, \theta)|^2 d\lambda. \quad (68)$$

Припустимо, що сім'я мір $\mu_T(d\lambda, \theta)$ слабо збігається при $T \rightarrow \infty$ до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda, \theta)$.

Додатна визначеність матричної міри $\mu(d\lambda, \theta)$ означає, що елементи $\mu^{jl}(d\lambda, \theta)$ матриці $\mu_T(d\lambda, \theta)$ є комплексні заряди обмеженої варіації та матриця $\mu_T(B, \theta)$ невід'ємно визначена для будь-якої множини $B \in \mathcal{B}$, причому $\mu(\mathbb{R}, \theta)$ – додатно визначена матриця.

Означення 2. (Grenander, 1954; Ibragimov & Rozanov, 1978; A. V. Ivanov et al., 2015) Міра $\mu(d\lambda, \theta)$ називається спектральною мірою функції $\tilde{g}(t, \theta)$, або, що те ж саме, спектральною мірою вектор-функції $\nabla \tilde{g}(t, \theta)$.

Нехай, $\tilde{g}(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t)$. Тоді спектральна міра $\mu(d\lambda, \theta^0)$ має вигляд (див. (A. V. Ivanov et al., 2015))

$$\begin{pmatrix} \delta & i\rho & \bar{\beta} \\ -i\rho & \delta & \bar{\gamma} \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (69)$$

де

$$\beta = \frac{\sqrt{3}(B^0\delta + iA^0\rho)}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}(-A^0\delta + iB^0\rho)}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}},$$

міра $\delta = \delta(d\lambda)$ та заряд $\rho = \rho(d\lambda)$ зосереджені у точках $\pm\phi^0$, причому $\delta\{\pm\phi^0\} = \frac{1}{2}$, $\rho(\{\pm\phi^0\}) = \pm\frac{1}{2}$.

Робота (A. V. Ivanov et al., 2015) містить результат, який для функції $\tilde{g}(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t)$ може бути сформульованим наступним чином.

Лема 4. Якщо виконано умову **A1** та послаблену умову **A2(i)**, а саме: процес ε , що задовольняє умову **A1(i)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L}(\frac{1}{|\lambda|})|\lambda|^{\alpha-1}$, де $\tilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, то випадковий вектор $\xi_T = \tilde{d}_T^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) \nabla \tilde{g}(t, \theta) dt$ має граничну при $T \rightarrow \infty$ коваріаційну матрицю $\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0)$.

Враховуючи (69) та лему 4, отримуємо

$$\sigma = 2\pi f(\phi^0) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B^0}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}} \\ \frac{\sqrt{3}B^0}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}} & \frac{-\sqrt{3}A^0}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Також зауважимо, що для даної тригонометричної функції

$$\tilde{d}_{1T}(\theta^0) \sim \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{d}_{2T}(\theta^0) \sim \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{d}_{3T}(\theta^0) \sim T^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{6} [(A^0)^2 + (B^0)^2]}. \quad (71)$$

Тому, враховуючи (70) і (71), коваріаційна матриця $W_T^{(11)}$ випадкового вектора $\xi_T^{(1)}$ може бути знайдена, як

$$W^{(11)} = Q\sigma Q, \quad \text{де } Q = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{6}} \right). \quad (72)$$

Отже

$$W^{(11)} = 2\pi f(\phi^0) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{3} \end{bmatrix} = 2\pi f(\phi^0) H_1. \quad (73)$$

2) Блок $W_T^{(22)}$.

Позначимо $-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2) = \beta^0 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0)$, де $\beta^0 = \sqrt{(C^0)^2 + (D^0)^2}$, $tg\hat{\beta}^0 = \frac{C^0}{D^0}$. Також будемо використовувати позначення

$$\begin{aligned} \mu_T(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \begin{bmatrix} \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \\ \mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^T \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt & \int_0^T \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \\ \int_0^T \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt & \int_0^T \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2 - \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \pm \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2 + \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \\ \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left(\psi^0 \left(t - \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \\ &\pm \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left(\psi^0 \left(t + \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos \left(s^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \\ &\pm \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos \left(s^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \right. \\ &\quad + \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \\ &\quad \pm \cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \\ &\quad \left. \pm \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \right]; \quad (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2 + \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \pm \frac{1}{2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2 - \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \\
 \mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left(\psi^0 \left(t + \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \\
 &\pm \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left(\psi^0 \left(t - \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin \left(s^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \\
 &\pm \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin \left(s^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \right. \\
 &\quad - \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \\
 &\quad \pm \cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \\
 &\quad \mp \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \left. \right]. \quad (76)
 \end{aligned}$$

Використовуючи введені вище позначення для інтегралів Френеля, отримуємо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\lambda, \hat{\beta}^0) = \begin{bmatrix} \mu_{11}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{12}(\lambda, \hat{\beta}^0) \\ \mu_{21}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{22}(\lambda, \hat{\beta}^0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \right. \\
 \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &\quad + \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \\
 &\quad \pm \cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \\
 &\quad \mp \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$\pm \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \Bigg]; \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0)}{\mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0)} &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \right. \\ &\quad - \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \\ &\quad \pm \cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \\ &\quad \left. \mp \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \right]; \quad (78) \end{aligned}$$

Із (75) та (76), за властивостями інтегралів Френеля, отримуємо, що рівномірно за T , $\lambda > 0$

$$|\mu_{ij}(\lambda, \hat{\beta}^0)| \leq \frac{4}{\sqrt{\psi^0}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (79)$$

Крім того, для будь-якого $\Lambda > 0$ та $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\psi^0} \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| \mu_{ij,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \mu_{ij}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right| &\leq \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| C \left(T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| \\ &+ \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| C \left(T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right) \right| + \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| S \left(T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| \\ &+ \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| S \left(T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (80) \end{aligned}$$

Вирази у (77) та (78) можна записати у більш стислому вигляді, звівши подібні доданки та користуючись непарністю функцій $S(x)$ та $C(x)$:

$$\begin{aligned} \mu_{11}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \sqrt{\frac{\pi}{8\psi^0}} \left(\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) + \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4\psi^0}} \cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 - \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{22}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{\sqrt{\psi^0}} \left(\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) C \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) S \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right); \\
\mu_{12}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \sqrt{\frac{\pi}{8\psi^0}} \left(\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) - \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) \\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{4\psi^0}} \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 - \frac{\pi}{4} \right); \\
\mu_{21}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= -\frac{1}{\sqrt{\psi^0}} \left(\cos \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) S \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sin \left(\frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) C \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \quad (81)
\end{aligned}$$

Далі дослідимо інтеграли виду $\int_0^T t \frac{\cos}{\sin}(\lambda t) \frac{\cos}{\sin}(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt$.

$$(i) \int_0^T t \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[\sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) - \sin(\hat{\beta}^0) \right. \\
\left. + \lambda \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right];$$

$$(ii) \int_0^T t \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[\sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) - \lambda \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right];$$

$$(iii) \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[-\cos(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) + \cos(\hat{\beta}^0) \right. \\
\left. - \lambda \mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right];$$

$$(iv) \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[-\cos(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) + \lambda \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right]. \quad (82)$$

Очевидно, що інтеграли (82) обмежені за T величиною

$$\frac{1}{2\psi^0} \left(2 + \lambda \frac{4}{\sqrt{\psi^0}} \right) = \frac{1}{\psi^0} + \frac{\lambda}{(\psi^0)^{\frac{3}{2}}}. \quad (83)$$

Далі розглянемо інтеграли $\int_0^T t^2 \frac{\cos}{\sin}(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt$.

$$(v) \int_0^T t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) \right. \\ \left. - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) + \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right];$$

$$(vi) \int_0^T t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) \right. \\ \left. - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right]. \quad (84)$$

Враховуючи умову **A2**, скористаємося стандартною формулою $B(t) = 2 \int_0^\infty f(\lambda) \cos(\lambda t) dt$. Тоді за т. Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$W_{11,T}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) \cos(\psi^0 t^2) \cos(\psi^0 s^2) dt ds \\ = 2 \int_0^\infty f(\lambda) [(\mu_{11,T}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{21,T}(\lambda, 0))^2] d\lambda \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty f(\lambda) [(\mu_{11,T}(\lambda, 0))^2 \\ + (\mu_{21,T}(\lambda, 0))^2] d\lambda = W_{11}^{(22)} \quad (85)$$

Аналогічно

$$W_{22}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda) [(\mu_{12,T}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{22,T}(\lambda, 0))^2] d\lambda; \\ W_{12}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda) [\mu_{11,T}(\lambda, 0)\mu_{12,T}(\lambda, 0) + \mu_{21}(\lambda, 0)\mu_{22}(\lambda, 0)] d\lambda; \quad (86)$$

Маємо далі

$$W_{33,T}^{(22)} = \frac{2(\beta^0)^2}{T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) t^2 s^2 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) \\ \times \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) ds dt d\lambda = \frac{2(\beta^0)^2}{T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \left[\left(\int_0^T t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) dt \right)^2 \right. \\ \left. + \left(t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) dt \right)^2 \right] d\lambda = \frac{(\beta^0)^2}{2(\psi^0)^2 T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \left[\left(T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \cos(\lambda T) - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) + \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \Big)^2 + \left(T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \right. \\
 & \left. \times \sin(\lambda T) - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right)^2 \Big] d\lambda \\
 & = \left(\frac{\beta^0}{2\psi^0} \right)^2 \sin^2(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) + O(T^{-1}), \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (87)
 \end{aligned}$$

Саме в цьому місці доведення використано існування 4-го спектрального моменту спектральної щільності $f(\lambda)$ з умови **A2**. Це стає зрозумілим, якщо ми підставимо під знаки квадратів в інтегралі (87) відповідні вирази з блоку формул (82).

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
 W_{23,T}^{(22)} &= \frac{2\beta^0}{T} \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) t^2 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) \cdot \cos(\psi^0 s^2) ds dt d\lambda \\
 &= \frac{2(\beta^0)^2}{T} \int_0^\infty f(\lambda) \left[\left(\int_0^{-T} t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \cdot \int_0^T \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2) dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \cdot \int_0^T \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2) dt \right] d\lambda \\
 &= \frac{\beta^0}{T\psi^0} \int_0^\infty f(\lambda) \left[\left(T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \mu_{11,T}(\lambda, 0) + \left(T \sin(\psi^0 T^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \mu_{21,T} \right] d\lambda \\
 &= \frac{\beta^0}{\psi^0} \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \int_0^\infty f(\lambda) \left[\mu_{11,T}(\lambda, 0) \cos(\lambda T) + \mu_{21,T}(\lambda, 0) \sin(\lambda T) \right] d\lambda \\
 &\quad + O(T^{-1}) \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (88)
 \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W_{13,T}^{(22)} = 0. \quad (89)$$

3) Блоки $W_T^{(12)}$ та $W_T^{(21)}$.

Оскільки $W_T^{(21)} = \left(W_T^{(12)} \right)^*$, то достатньо знайти границю при $T \rightarrow \infty$ блока $W_T^{(12)}$. Позначимо $-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t) = \alpha^0 \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0)$, де $\alpha^0 = \sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}$, $tg \hat{\alpha}^0 = \frac{A^0}{B^0}$.

Покажемо, що величини

$$\begin{aligned}
 W_{11,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \cos(\phi^0 t) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\
 W_{12,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \sin(\phi^0 t) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\
 W_{13,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) t \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\
 W_{21,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \cos(\phi^0 t) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \\
 W_{22,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \sin(\phi^0 t) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \\
 W_{23,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) t \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \tag{90}
 \end{aligned}$$

збігаються до нуля при $T \rightarrow \infty$.

Нехай $G(t, s)$ деяка неперервна функція. Розглянемо заміну змінних в інтегралі

$$\begin{aligned}
 I = \int_0^T \int_0^T B(t-s) G(t, s) dt ds &= \int_0^T B(u) \left[\int_0^{T-u} G(u+v, v) dv \right] du \\
 &\quad + \int_0^T B(u) \left[\int_0^{T-u} G(v, u+v) dv \right] du = I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

що узагальнює стандартну заміну змінних в інтегралі I при $G(t, s) \equiv 1$. Зробимо у внутрішньому інтегралі інтеграла I_2 заміну змінних $u+v \rightarrow v$. Тоді матимемо $I_2 = \int_0^T B(u) \int_u^T G(v-u, v) dv du$ та

$$I = \int_0^T B(u) \left[\int_0^T G(v-u, v) dv - \int_0^u G(v-u, v) dv + \int_0^{T-u} G(u+v, v) dv \right] du. \tag{91}$$

Якщо використовувати (91), то у нас під знаками інтегралів не буде величин $\frac{\cos}{\sin}(\psi^0(u+v)^2)$, а натомість будуть $\frac{\cos}{\sin}(\psi^0 v^2)$, що спрощує обчислення.

Також зауважимо, що згідно з формулами (75)-(83),

$$\left| \int_0^{g(T,u)} \frac{\cos}{\sin}(\phi^0 v) \frac{\cos}{\sin}(\psi^0 v^2) dv \right| \leq \frac{4}{\sqrt{\psi^0}}, \tag{92}$$

$$\left| \int_0^{g(T,u)} v \frac{\cos(\phi^0 v)}{\sin(\phi^0 v)} \frac{\cos(\psi^0 v^2)}{\sin(\psi^0 v^2)} dv \right| \leq \frac{1}{\psi^0} \left(1 + \frac{2\phi^0}{\sqrt{\psi^0}} \right), \quad (93)$$

де $g(T, u)$ – деяка функція, що залежить від T та/або u .

Використовуючи формули (91)-(93), отримуємо

$$\begin{aligned} W_{11,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T B(u) \left[\int_0^T \cos(\phi^0 v - \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_0^u \cos(\phi^0 v - \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv + \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v + \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv \right] du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| \left[\left| \int_0^T \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^u \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^u \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^{T-u} \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right] du \\ &\leq \frac{24}{\sqrt{\psi^0}} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du. \quad (94) \end{aligned}$$

Очевидно, що за умови **A1(ii)**

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (95)$$

За умови **A1(i)** при $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du = \sqrt{T} \int_0^1 |B(Tu)| du \leq \frac{\sqrt{T}}{1-\alpha} B(T) = \frac{L(T)}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{T^{\alpha-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (96)$$

Отже, враховуючи (95) та (96), з (94) випливає, що

$$W_{11,T}^{(12)} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (97)$$

Аналогічно,

$$W_{12,T}^{(12)}, W_{21,T}^{(12)}, W_{22,T}^{(12)} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (98)$$

Маємо далі

$$\begin{aligned}
 W_{13,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T B(u) \left[\int_0^T (v-u) \cos(\phi^0 v - \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^u (v-u) \cos(\phi^0 v - \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{T-u} (v+u) \cos(\phi^0 v + \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv \right] du \\
 &\leq \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| \left[\left| \int_0^T v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right. \\
 &\quad + u \left| \int_0^T \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^T \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^T v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \\
 &\quad + u \left| \int_0^u \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^u \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{T-u} v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^{T-u} v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \\
 &\quad \left. + u \left| \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^{T-u} \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right] du \\
 &\leq \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| \left[\frac{6}{\psi^0} \left(1 + \frac{2\phi^0}{\sqrt{\psi^0}} \right) + \frac{24}{\sqrt{\psi^0}} u \right] du \\
 &\leq \frac{6\alpha^0}{\psi^0} \left(1 + \frac{2\alpha^0}{\sqrt{\psi^0}} \right) \cdot \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| du + \frac{24\alpha^0}{\sqrt{\psi^0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{99}$$

Аналогічно

$$W_{23,T}^{(12)} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \tag{100}$$

Математичні сподівання $W_{31,T}^{(12)} = E\xi_T^1 \xi_T^6$, $W_{32,T}^{(12)} = E\xi_T^2 \xi_T^6$, $W_{33,T}^{(12)} = E\xi_T^3 \xi_T^6$, для подальшого доведення не знадобляться, достатньо тільки знати, що $E(\xi_T^6)^2 < \infty$ (див. формулу (87)).

З наведених вище підрахунків випливає наступне твердження.

Лема 5. Нехай виконуються умови **A1** та **A2**. Тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[W_T - \text{diag} \left(0, 0, 0, 0, 0, \left(\frac{\beta^0}{2\psi^0} \right)^2 \sin^2 \left(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0 \right) \right) \right] = W,$$

де $W = \text{diag}(W^{(11)}, W^{(22)})$ – блочно-діагональна матриця з блоками

$$\begin{aligned}
 W^{(11)} &= 2\pi f(\phi^0)H_1 = 2\pi f(\phi) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{3} \end{bmatrix}; \\
 W^{(22)} &= \begin{bmatrix} W_{11}^{(22)} & W_{12}^{(22)} & 0 \\ W_{21}^{(22)} & W_{22}^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 W_{11}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) [(\mu_{11}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{11}(\lambda, 0))^2] d\lambda; \\
 W_{22}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) [(\mu_{12}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{22}(\lambda, 0))^2] d\lambda; \\
 W_{21}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) [\mu_{11}(\lambda, 0)\mu_{12}(\lambda, 0) + \mu_{21}(\lambda, 0)\mu_{22}(\lambda, 0)] d\lambda,
 \end{aligned} \tag{101}$$

причому функції $\mu_{ij}(\lambda, 0)$, $i, j = 1, 2$, задані формулами (81).

Доведення теореми 2. Користуючись результатами леми 3 та леми 5, перейдемо до доведення асимптотичної нормальності ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. Розглянемо матрицю H з леми 3. Використовуючи елементарні обчислення, отримуємо, що $\det(H_1) = \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{96}$, $\det(H_2) = \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{90}$ і $H^{-1} = \text{diag}(H_1^{-1}, H_2^{-1})$, де

$$H_1^{-1} = \frac{2}{(A^0)^2 + (B^0)^2} \begin{bmatrix} (A^0)^2 + 4(B^0)^2 & -3A^0B^0 & -6B^0 \\ -3A^0B^0 & 4(A^0)^2 + (B^0)^2 & 6A^0 \\ -6B^0 & 6A^0 & 12 \end{bmatrix}; \tag{102}$$

$$H_2^{-1} = \frac{1}{2((C^0)^2 + (D^0)^2)} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0D^0 & -15D^0 \\ -5C^0D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 & 15C^0 \\ -15D^0 & 15C^0 & 45 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Позначимо

$$K_T = \left(d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_T''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \right)^{-1} - H^{-1} \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty, \tag{104}$$

а також введемо діагональну матрицю

$$c_T = \text{diag}(1, 1, 1, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}). \tag{105}$$

Враховуючи позначення (63), (64), (104) та (105), перепишемо (47) у вигляді

$$c_T d_T(\theta_T - \theta^0) = c_T K_T s_T^{-1} \xi_T + c_T H^{-1} s_T^{-1} \xi_T = V_{1T} + V_{2T}. \quad (106)$$

Зауважимо, що $c_T d_T(\theta_T - \theta^0) = \left(T^{\frac{1}{2}}(A_T - A^0), T^{\frac{1}{2}}(B_T - B^0), T^{\frac{3}{2}}(\phi_T - \phi^0), T(C_T - C^0), T(D_T - D^0), T^3(\psi_T - \psi^0) \right)^*$ – це вектор із формулювання теореми 2.

Розглянемо окремо кожен доданок в (106).

$$V_{1T} = \begin{bmatrix} K_{11,T} \xi_T^1 + K_{12,T} \xi_T^2 + K_{13,T} \xi_T^3 + \frac{K_{14,T} \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{15,T} \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{16,T} \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ K_{21,T} \xi_T^1 + K_{22,T} \xi_T^2 + K_{23,T} \xi_T^3 + \frac{K_{24,T} \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{25,T} \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{26,T} \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ K_{31,T} \xi_T^1 + K_{32,T} \xi_T^2 + K_{33,T} \xi_T^3 + \frac{K_{34,T} \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{35,T} \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{36,T} \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ \sqrt{T} K_{41,T} \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{42,T} \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{43,T} \xi_T^3 + K_{44,T} \xi_T^4 + K_{45,T} \xi_T^5 + \frac{K_{46,T} \xi_T^6}{T} \\ \sqrt{T} K_{51,T} \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{52,T} \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{53,T} \xi_T^3 + K_{54,T} \xi_T^4 + K_{55,T} \xi_T^5 + \frac{K_{56,T} \xi_T^6}{T} \\ \sqrt{T} K_{61,T} \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{62,T} \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{63,T} \xi_T^3 + K_{64,T} \xi_T^4 + K_{65,T} \xi_T^5 + \frac{K_{66,T} \xi_T^6}{T} \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Покажемо, що $V_{1T} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $T \rightarrow \infty$. Кожен елемент вектора V_{1T} є лінійною комбінацією процесів $\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5, T^{-1} \xi_T^6$ та елементів матриці $K_{ij,T}$, $i, j = \overline{1, 6}$. За формулами (73) та (85)–(89), що описують граничну поведінку коваріаційної матриці вектора ξ_T , отримуємо слабку збіжність процесів $\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5$ до гауссівських випадкових величин з нульовим середнім та дисперсіями $\pi f(\phi^0)$, $\pi f(\phi^0)$, $\frac{1}{3} \pi f(\phi^0) ((A^0)^2 + (B^0)^2)$, $W_{11}^{(22)}$, $W_{22}^{(22)}$ (див. відповідні формули). Величини $K_{ij,T}$, $i, j = \overline{1, 6}$ прямують до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$, однак, для того, щоб зробити висновок про збіжність до нуля вектора V_{1T} , необхідно додатково пояснити граничну поведінку елементів $\sqrt{T} K_{mn,T}$, $m = \overline{4, 6}$, $n = \overline{1, 3}$. Позначимо $H_T = (H_{ij,T})_{i,j=1}^6 = d_T^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_T''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1}$. Тоді кожен елемент $K_{mn,T}$, $m = \overline{4, 6}$, $n = \overline{1, 3}$, можна зобразити у вигляді

$$\frac{1}{\det(H_1)} \sum_{\sigma \in S_5} \text{sign}(\sigma) H_{1,\sigma(1),T} \cdot \dots \cdot H_{R-1,\sigma(R-1),T} \cdot H_{R+1,\sigma(R+1),T} \cdot \dots \cdot H_{5,\sigma(5),T}, \quad (108)$$

де S_5 – група перестановок 5-го порядку і, відповідно, сума береться по всіх перестановках σ з цієї групи; sign позначено знак перестановки, який дорівнює 1 або -1 залежно від парності числа інверсій в ній. Зауважимо, що у кожному доданку суми (108) всі множники обмежені та присутній, принаймні, один множник з наступного списку:

$$J_{41}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\bar{\psi} t^2) \cos(\bar{\phi} t) dt; \quad J_{42}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\bar{\psi} t^2) \sin(\bar{\phi} t) dt;$$

$$J_{43}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\bar{\psi}t^2)t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt;$$

$$J_{51}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2) \cos(\bar{\phi}t) dt; \quad J_{52}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2) \sin(\bar{\phi}t) dt;$$

$$J_{53}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2)t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt; \quad (109)$$

$$J_{61}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) \cos(\bar{\phi}t) dt;$$

$$J_{62}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) \sin(\bar{\phi}t) dt;$$

$$J_{63}^{(3)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{T^4} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt.$$

З теореми 1, формул (60) та (61) отримуємо, що величини $\sqrt{T} J_{ij}^{(3)}(\bar{\theta}) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$, $i = \overline{4, 6}$, $j = \overline{1, 3}$. Наприклад, для елемента $J_{43}^{(3)}(\bar{\theta})$ матимемо

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{T} J_{43}^{(3)}(\bar{\theta}) \right| &\leq |A_T - A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |A_T - A^0| \\ &\quad \times \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| \\ &\quad + |A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |B_T - B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| \\ &\quad + |B_T - B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| \\ &\quad + |B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Крім того, матриця H_T збігається до невиродженої матриці H , тому при $T \rightarrow \infty$ $\det(H_T) \rightarrow \det(H) \neq 0$. Отже, можемо зробити висновок, що елементи $\sqrt{T} K_{mn,T} \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$, $m = \overline{4, 6}$, $n = \overline{1, 3}$.

Враховуючи вище наведені міркування, отримуємо, що координати вектора V_{1T} прямують до 0, принаймні, за ймовірністю при $T \rightarrow \infty$.

З іншого боку,

$$V_{2T} = \begin{bmatrix} h_{11}\xi_T^1 + h_{12}\xi_T^2 + h_{13}\xi_T^3 \\ h_{21}\xi_T^1 + h_{22}\xi_T^2 + h_{23}\xi_T^3 \\ h_{31}\xi_T^1 + h_{32}\xi_T^2 + h_{33}\xi_T^3 \\ h_{44}\xi_T^4 + h_{45}\xi_T^5 + \frac{h_{46}\xi_T^6}{T} \\ h_{54}\xi_T^4 + h_{55}\xi_T^5 + \frac{h_{56}\xi_T^6}{T} \\ h_{64}\xi_T^4 + h_{65}\xi_T^5 + \frac{h_{66}\xi_T^6}{T} \end{bmatrix}, \text{ де } h_{ij}, i, j = \overline{1, 6} - \text{ елементи матриці } H^{-1}. \quad (110)$$

Величини $\frac{h_{46}\xi_T^6}{T}, \frac{h_{56}\xi_T^6}{T}, \frac{h_{66}\xi_T^6}{T}$ збігаються до нуля у середньому квадратичному. Тоді випадковий вектор $c_T d_T(\theta_T - \theta^0)$ слабо збігається до гауссівського випадкового вектора:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_T d_T(\theta_T - \theta^0) = \begin{bmatrix} h_{11}\xi^1 + h_{12}\xi^2 + h_{13}\xi^3 \\ h_{21}\xi^1 + h_{22}\xi^2 + h_{23}\xi^3 \\ h_{31}\xi^1 + h_{32}\xi^2 + h_{33}\xi^3 \\ h_{44}\xi^4 + h_{45}\xi^5 \\ h_{54}\xi^4 + h_{55}\xi^5 \\ h_{64}\xi^4 + h_{65}\xi^5 \end{bmatrix} \quad (111)$$

з коваріаційною матрицею

$$\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2), \quad (112)$$

де

$$\Sigma_1 = \frac{4\pi f(\phi^0)}{(A^0)^2 + (B^0)^2} \begin{bmatrix} (A^0)^2 + 4(B^0)^2 & -3A^0 B^0 & -6B^0 \\ -3A^0 B^0 & 4(A^0)^2 + (B^0)^2 & 6A^0 \\ -6B^0 & 6A^0 & 12 \end{bmatrix}; \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \frac{1}{4((C^0)^2 + (D^0)^2)^2} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0 D^0 \\ -5C^0 D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 \\ -15D^0 & 15C^0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_{11}^{(22)} & W_{12}^{(22)} \\ W_{21}^{(22)} & W_{22}^{(22)} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0 D^0 & -15D^0 \\ -5C^0 D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 & 15C^0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (114)$$

а величини $W_{11}^{(22)}, W_{22}^{(22)}, W_{12}^{(22)} = W_{21}^{(22)}$ задано формулами (85), (86) та (81). Теорему 2 доведено. $\square$

Наслідок 1. За умов **A1** та **A2** для довільних $\delta_i \in (0, \frac{1}{2})$, $i = 1, 2, 3$; $\delta_j \in (0, 1)$, $j = 4, 5, 6$, випадкові величини $T^{\frac{1}{2}-\delta_1}(A_T - A^0)$, $T^{\frac{1}{2}-\delta_2}(B_T - B^0)$, $T^{\frac{3}{2}-\delta_3}(\phi_T - -\phi^0)$, $T^{1-\delta_4}(C_T - C^0)$, $T^{1-\delta_5}(D_T - D^0)$, $T^{3-\delta_6}(\psi_T - \psi^0) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Наслідок 2. Якщо $\text{rank}(\mathcal{R}) = 5$ (означення $\mathcal{R}$ див. нижче), то $\text{rank}(W) = 5$, тобто нормована ОНК $c_T d_T(\theta_T - \theta^0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ має сингулярний нормальний розподіл.

Proof. Матрицю W з (112) можна записати як добуток трьох блочно-діагональних матриць

$$\Sigma = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}^* = R\mathcal{R}R^*,$$

де $R_1 = H_1^{-1}$ (формула (102)), R_2 – це матриця H_2^{-1} (формула (103)) без останнього стовпчика, тобто R – матриця порядку 6×5 . Матриця $\mathcal{R}$ є коваріаційною матрицею граничного випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)^*$, і ми припускаємо, що $\text{rank}(\mathcal{R}) = 5$.

Розглянемо квадратну матрицю M матриці R , отриману викресленням останнього рядка матриці R . Тоді (див. текст перед формулою (102))

$$\begin{aligned} \det M &= \det H_1^{-1} \times \det \left(\frac{0,5}{(C^0)^2 + (D^0)^2} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0D^0 \\ -5C^0D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{864}{(A^0)^2 + (B^0)^2} > 0. \end{aligned}$$

Отже $\text{rank}(R) = \text{rank}(R^*) = 5$, $\text{rank}(R\mathcal{R}) = \text{rank}(R) = 5$ і $\text{rank}(\Sigma) = \text{rank}(R\mathcal{R}R^*) = \text{rank}(R\mathcal{R}) = 5$. $\square$

References

- Artis, M., Hoffmann, M., Nachane, D., & Toro, J. (2004). *The Detection of Hidden Periodicities: A Comparison of Alternative Methods* (Economics Working Papers No. No ECO2004/10). European University Institute, San Domenico, Italy.
<https://ideas.repec.org/p/eui/euiwps/eco2004-10.html>
- Casazza, P., & Fickus, M. (2006). Fourier Transforms of Finite Chirps. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2006, 1-7.
<https://doi.org/10.1155/ASP/2006/70204>
- Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. (2014). *Table of integrals, series, and products (eighth edition)* (D. Zwillinger & V. Moll, Eds.). Academic Press.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384933-5.00021-7>
- Grenander, U. (1954). On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *The Annals of Mathematical Statistics*, 25(2), 252-272.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177728784>
- Grover, R., Kundu, D., & Mitra, A. (2021). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators and Sequential Least Squares Estimators of a Chirp-Like Signal Model Parameters. *Circuits Systems and Signal Processing*, 40(11), 5421-5465.
<https://doi.org/10.1007/s00034-021-01724-7>
- Ibragimov, I., & Rozanov, Y. (1978). Gaussian random processes. *Springer*, 277.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19800600230>

- Ivanov, A., & Hladun, V. (2023). Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise. *Austrian J. Stat.*(52(SI)), 107-126.
<https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1762>
- Ivanov, A., & Hladun, V. (2024). Asymptotic Normality of the LSE for Chirp Signal Parameters. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 11(2), 195-216.
<https://doi.org/10.15559/24-VMSTA247>
- Ivanov, A. V. (2010). Consistency of the Least Squares Estimator of the Amplitudes and Angular Frequencies of a Sum of Harmonic Oscillations in Model with Long-Range Dependence. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 80, 61-69.
<https://doi.org/10.1090/S0094-9000-2010-00794-0>
- Ivanov, A. V., Leonenko, N. N., Ruiz-Medina, M. D., & Zhurakovsky, B. M. (2015). Estimation of Harmonic Component in Regression with Cyclically Dependent Errors. *Statistics: A journal of Theoretical and Applied Statistics*, 49(1), 156-186.
<https://doi.org/10.1080/02331888.2013.864656>
- Kundu, D., & Nandi, S. (2008). Parameter Estimation of Chirp Signals in Presence of Stationary Noise. *Statist Sinica*, 18, 187-202.
<http://www.jstor.org/stable/24308252>
- Kundu, D., & Nandi, S. (2012). Statistical Signal Processing: Frequency Estimation. *Springer*, 141.
<https://doi.org/10.1007/978-81-322-0628-6>
- Kundu, D., & Nandi, S. (2021). On Chirp and some Related Signal Analysis: a Brief Review and some New Results. *Sankhya A*, 83(2), 844-890.
<https://doi.org/10.1007/s13171-021-00242-7>
- Lahiri, A. (2011). *Estimators of Parameters of Chirp Signals and their Properties*. Ph. D thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur, India.
- Lahiri, A., Kundu, D., & Mitra, A. (2015). Estimating the Parameters of Multiple Chirp Signals. *Journal of Multivariate Analysis*, 139, 189-206.
<https://doi.org/10.1016/j.jmva.2015.01.019>
- Mboup, M., & Adal, T. (2012). A Generalization of the Fourier Transform and its Application to Spectral Analysis of Chirp-Like Signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 32, 305-312.
<https://doi.org/10.1016/j.acha.2011.11.002>
- Nandi, S., & Kundu, D. (2004). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of the Parameters of the Chirp Signals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56, 529-544.
<https://doi.org/10.1007/BF02530540>
- Nandi, S., & Kundu, D. (2020). *Statistical Signal Processing: Frequency Estimation* (No. 2nd edition). Springer.

<https://doi.org/10.1007/978-81-322-0628-6>

Quinn, B. G., & Hannan, E. J. (2012). *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge University Press.

<https://doi.org/10.1017/CB09780511609602>

В.В. Гладун, О.В. Иванов, А.М. Кругол (2025). Асимптотичний розподіл ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(2), 17–53.

Submitted: 2025-02-25

Accepted: 2025-04-20

В.В. Гладун, О.В. Иванов, А.М. Кругол (2025). Асимптотичний розподіл ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(2), 17–53.

Abstract. The paper considers a continuous-time elementary quasi-chirped signal observed against the background of additive strongly or weakly dependent Gaussian random noise. As an estimate of the unknown parameters of this signal, the least squares estimate (LSE) is considered. The asymptotic properties of the LSE of the studied signal were considered and theorems on the strong consistency and asymptotic normality of the LSE of the unknown parameters of the quasi-chirped signal were obtained.

Keywords: harmonic signal, elementary chirped signal, strongly/weakly dependent stationary Gaussian process, least squares estimation, uniform law of large numbers, Fresnel integrals, strong consistency, spectral measure of the regression function, asymptotic normality.