

Векторний потенціал соленоїдального поля

В. О. Білий¹, І. С. Ласкін²

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна,

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-9696-1679>

²Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна

(¹*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*

²*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*)

Анотація

У статті розглянуто приклади знаходження векторного потенціалу соленоїдального поля, що визначається рівністю $\vec{F} = \nabla \times \vec{a}$, де $\vec{a}$ — векторний потенціал, ∇ — оператор Гамільтона; та деякі його застосування. На відміну від потенціального поля, для якого знаходження його скалярного потенціалу $u = u(x, y, z)$ пов'язано з незалежністю відповідного криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, яке добре вивчено, знаходження векторного потенціалу значно складніше та потребує розв'язання відповідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних. Зазначено, що такий потенціал визначається з точністю до градієнта будь-якої скалярної функції. Також продемонстровано можливість розкладу довільного векторного поля на суму потенціальної та соленоїдальної складових. Наведено приклади знаходження векторного потенціалу соленоїдального та гармонічного полів. Отримані результати можуть бути застосовані для розв'язання задач з електромагнітної теорії поля, математичної фізики та прикладної математики.

Ключові слова: Векторні поля; потенціальні, соленоїдальні та гармонічні поля; векторний потенціал соленоїдальних та гармонічних полів; оператор Гамільтона (∇); області застосування векторного потенціалу.

MSC2010 ,

УДК

1 Основні поняття

Рівність $\vec{F} = \nabla u$ є умовою того, що векторне поле, породжене $\vec{F}$, де u — деяка скалярна функція, є потенціальним, а $u = u(x, y, z)$ — його потенціалом. Якщо таке поле задане, то знайти його дуже важливу характеристику u , використовуючи незалежність відповідного криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, а отже й те, що диференціальна форма $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ є повним диференціалом, — зовсім нескладно.

Інша ситуація із соленоїдальним полем. Знову ж таки, із рівності $\vec{F} = \nabla \times \vec{a}$ випливає, що поле, породжене $\vec{F} = (P, Q, R)$ є соленоїдальним, де $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — його векторний потенціал, знайти який значно складніше.

Дійсно, маємо таку систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних у координатній формі:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = P, \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = Q, \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = R, \end{cases}$$

розв'язання якої викликає певні труднощі.

Зауваження. Якщо існує вектор $\vec{a}$, що задовольняє цій системі, то і вектор $\vec{a} + \nabla f$ для будь-якої неперервно диференційованої скалярної функції $f(x, y, z)$ також задовольняє системі, бо $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$. Це означає, що векторний потенціал соленоїдального поля визначається неоднозначно, так само, як і потенціал u для потенціального поля, що допомагає спростити розв'язання системи.

Відзначимо також той факт, що будь-яке векторне поле $\vec{F}$ можна подати у вигляді:

$$\vec{F} = \vec{U} + \vec{V},$$

де $\vec{U}$ — потенціальне поле, а $\vec{V}$ — соленоїдальне. Якщо поле задовольняє одночасно умовам $\nabla \times \vec{F} = 0$ та $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, то воно називається **гармонічним**.

2 Області застосування

1. Електромагнетизм та електротехніка. У класичній електродинаміці (зокрема в **рівняннях Максвелла**) векторний потенціал $\vec{a}$ є ключовою величиною.

- Векторний потенціал використовується для визначення магнітного поля за формулою:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{a},$$

де $\vec{B}$ — вектор магнітної індукції (магнітне поле), ∇ — оператор ротора, який визначає обертальну або вихрову складову векторного поля.

- У випадках, коли магнітне поле не має простої структури, векторний потенціал дозволяє спростити обчислення.
- В електродвигунах, трансформаторах, котушках та інших індуктивних елементах векторний потенціал використовують для моделювання розподілу магнітних полів.

2. Квантова механіка. У квантовій теорії векторний потенціал є не лише допоміжною змінною, а безпосередньо впливає на динаміку частинок.

- **Ефект Агаронова–Бома** є чітким прикладом, де електрон відчуває дію векторного потенціалу навіть у зоні з нульовим магнітним полем. Експериментально підтверджено, що фаза хвильової функції змінюється залежно від векторного потенціалу на шляху частинки:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \int \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

де $\Delta\varphi$ — зміна фази хвильової функції частинки, q — електричний заряд, $\hbar$ — приведена стала Планка, $\int \vec{a} \cdot d\vec{r}$ — криволінійний інтеграл уздовж траєкторії руху частинки.

- Векторний потенціал у квантовій механіці впливає не лише на силу, як у класичній фізиці, а на саму хвильову функцію, зокрема на її фазу, що змінює спостережувані інтерференційні ефекти. Тому векторний потенціал є фізично значущим об'єктом, навіть якщо магнітне поле дорівнює нулю.

3. Суперпровідність. У фізиці надпровідників векторний потенціал $\vec{a}$ відіграє ключову роль у математичних моделях, зокрема в **теорії Гінзбурга–Ландау**. Ця теорія описує поведінку надпровідного стану за допомогою комплексної хвильової функції ψ , що характеризує щільність надпровідних електронів. У рівняннях Гінзбурга–Ландау векторний потенціал входить у коваріантний градієнт:

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{a} \right)^2 \psi,$$

де i — уявна одиниця ($i^2 = -1$), $2e$ — заряд куперівської пари (двох електронів), $\hbar$ — приведена стала Планка, $\vec{a}$ — векторний потенціал магнітного поля, ∇ — оператор градієнта в просторі, який описує зміну функції у просторі (диференціювання за координатами), c — швидкість світла у вакуумі, ψ — комплексна

хвильова функція, що описує макроскопічний стан надпровідника (наприклад, щільність куперівських пар).

Це означає, що векторний потенціал визначає проникнення магнітного поля в надпровідник, формування магнітних вихорів та ефекти магнітного екранування (**ефект Мейснера**). Він також застосовується в розрахунках струмів у надпровідних контурах.

4. Аеродинаміка та гідродинаміка. У механіці рідин та газів векторний потенціал використовується для опису нестискаємих потоків, тобто таких, для яких дивергенція вектора швидкості дорівнює нулю:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

де $\vec{v}$ — вектор швидкості ($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$), $\nabla \cdot \vec{v}$ — дивергенція вектора швидкості.

У цьому випадку поле швидкості можна подати як ротор деякого векторного потенціалу:

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{a}_v,$$

де $\nabla \times \vec{a}_v$ — ротор векторного потенціалу швидкості.

Цей підхід:

- 1) дозволяє зменшити кількість рівнянь для чисельного моделювання;
- 2) полегшує побудову вихрових моделей;
- 3) широко застосовується у задачах турбулентності, аеродинаміки літаків, гідрравліки трубопроводів тощо.

5. Комп'ютерне моделювання. У сучасних чисельних методах — таких як метод скінченних елементів (*англ. Finite element method*) та метод граничних елементів (*англ. Boundary element method*) — векторний потенціал $\vec{a}$ часто використовується замість магнітного поля $\vec{B}$, оскільки він:

- забезпечує більш точні розв'язки;
- спрощує постановку граничних умов;
- дозволяє зручніше формувати рівняння для їх обчислення.

Це особливо корисно в електротехніці, машинобудуванні та медицині (наприклад, у моделюванні магнітно—резонансної томографії, електромагнітних полів у тканинах тощо).

3 Приклади

Приклад 1. Задано поле: $\vec{F} = 3x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} - 2xyz\vec{k}$. Знайдемо його векторний потенціал $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Перевіримо, що поле є соленоїдальним:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 6xy - 4xy - 2xy = 0.$$

Покладемо $a_z = z^4$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} P = 3x^2y = -\frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ Q = -2xy^2 = \frac{\partial a_x}{\partial z}, \\ R = -2xyz = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Звідки, інтегруючи, знаходимо:

$$a_x = -2xy^2z, \quad a_y = -3x^2yz.$$

Отже,

$$\vec{a} = -2xy^2z\vec{i} - 3x^2yz\vec{j} + z^4\vec{k}.$$

Перевірка:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2xy^2z & -3x^2yz & z^4 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + 3x^2y) + \vec{j}(-2xy^2 - 0) + \vec{k}(-2xyz) = \vec{F}.$$

Приклад 2. Задано поле: $\vec{F} = 8xy\vec{i} + (3x^2 - y^2 - 2y)\vec{j} + (z + x^2y)\vec{k}$.

Представимо його як $\vec{F} = \vec{U} + \vec{V}$, де $\vec{U}$ — потенціальне, а $\vec{V}$ — соленоїдальне.

Знайдемо ротор:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8xy & 3x^2 - y^2 - 2y & z + x^2y \end{vmatrix} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} - 2x\vec{k}.$$

Система для $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$, при $V_y = -y^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial y} = x^2, \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = -2xy, \\ -\frac{\partial V_x}{\partial y} = -2x. \end{cases}$$

Звідки:

$$V_x = 2xy, \quad V_y = -y^2, \quad V_z = x^2y.$$

Отже:

$$\vec{V} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + x^2y\vec{k}, \quad \vec{U} = \vec{F} - \vec{V} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Перевірка:

$$\nabla \times \vec{U} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

Для поля $\vec{U}$ знайдемо його потенціал $u = u(x, y, z)$. Зрозуміло, що $\vec{U} = \nabla u$, де

$$u = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (3x^2 - 2t) dt + \int_0^z t dt = 3x^2y - y^2 + (1/2)z^2 + C.$$

Перевірка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy; \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = z.$$

Знайдемо тепер векторний потенціал поля $\vec{V}$. Маємо $\vec{V} = \nabla \times \vec{a}$. Для знаходження $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, вибираючи $a_x = 0$, розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 2xy, \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} = -y^2, \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} = x^2y. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо:

$$a_z = xy^2, a_y = \frac{x^3y}{3} \Rightarrow \vec{a} = \left(0; \frac{x^3y}{3}; xy^2\right).$$

Перевірка:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{x^3y}{3} & xy^2 \end{vmatrix} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + x^2y\vec{k}.$$

Приклад 3. Розглянемо просторове електричне поле, створене точковим зарядом. Перевіримо, що воно є гармонічним, тобто таким, яке задовольняє одночасно умови:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Маємо векторне поле:

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Знайдемо дивергенцію:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{x}{r^3}\right)'_x + \left(\frac{y}{r^3}\right)'_y + \left(\frac{z}{r^3}\right)'_z = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Знайдемо ротор:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{3yz - 3yz}{r^5} \right) + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = \vec{0}.$$

Отже, дійсно, векторне поле є **гармонічним**.

Оскільки $\vec{F}$ — потенціальне поле, то знайдемо його потенціал $u = u(x, y, z) + C$:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x \frac{tdt}{(\sqrt{t^2 + 1})^3} + \int_0^y \frac{tdt}{(\sqrt{x^2 + t^2 + 1})^3} + \int_1^z \frac{tdt}{(\sqrt{x^2 + y^2 + t^2})^3} + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \Big|_0^x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + t^2}} \Big|_0^y - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + t^2}} \Big|_0^z + C = C - \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{r^3}.$$

Але $\vec{F}$ також і соленоїдальне поле. Знайдемо його векторний потенціал.

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, виберемо $a_x = 0$. Тоді маємо систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} &= \frac{x}{r^3}, \\ -\frac{\partial a_z}{\partial x} &= \frac{y}{r^3} \Rightarrow a_z = -y \int \frac{dx}{\left(\sqrt{(\sqrt{y^2 + z^2})^2 + x^2} \right)^3} = -\frac{xy}{r(y^2 + z^2)}, \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} &= \frac{z}{r^3} \Rightarrow a_y = \frac{zx}{r(y^2 + z^2)}, \end{aligned} \right.$$

тобто

$$\vec{a} = (0; a_y; a_z) = \left(0; \frac{xz}{r(y^2 + z^2)}; -\frac{xy}{r(y^2 + z^2)}\right).$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{xz}{r(y^2 + z^2)} & -\frac{xy}{r(y^2 + z^2)} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\left(-\frac{xy}{r(y^2 + z^2)} \right)'_y - \left(\frac{xz}{r(y^2 + z^2)} \right)'_z \right) \\ &+ \vec{j} \left(\frac{xy}{r(y^2 + z^2)} \right)'_x + \vec{k} \left(\frac{xz}{r(y^2 + z^2)} \right)'_x = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Дійсно:

$$\left(\frac{xy}{r(y^2 + z^2)} \right)'_x = \frac{y}{y^2 + z^2} \cdot \left(\frac{x}{r} \right)'_x = \frac{y}{y^2 + z^2} \cdot \frac{r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{y}{y^2 + z^2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3};$$

$$\left(\frac{xz}{r(y^2 + z^2)} \right)'_x = \frac{z}{y^2 + z^2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{z}{r^3};$$

$$\left(-\frac{xy}{r(y^2 + z^2)} \right)'_y - \left(\frac{xz}{r(y^2 + z^2)} \right)'_z = -x \left[\left(\frac{y}{r(y^2 + z^2)} \right)'_y + \left(\frac{z}{r(y^2 + z^2)} \right)'_z \right] = \frac{x}{r^3}.$$

4 Висновок

У даній статті було розглянуто деякі властивості векторного потенціалу соленоїдального поля, яке відіграє ключову роль у багатьох галузях фізики та прикладної математики. Продemonстровано, що на відміну від скалярного потенціалу для потенціальних полів, знаходження векторного потенціалу вимагає розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних та є суттєво складнішим завданням.

Наведені приклади обчислення векторного потенціалу для конкретних соленоїдальних та гармонічних полів. Окремо проаналізовано неоднозначність векторного потенціалу, яка зумовлена можливістю додавання градієнта скалярної функції без зміни поля.

Особливу увагу приділено застосуванням векторного потенціалу в електромагнетизмі, квантовій механіці, теорії надпровідності, гідродинаміці та

комп'ютерному моделюванні. Отримані результати мають як теоретичне, так і практичне значення, зокрема для розв'язання задач з електродинаміки, математичної фізики, а також при побудові обчислювальних моделей у технічних і природничих науках.

На завершення автори висловлюють подяку Білому О.Г. за постановку задачі та корисні обговорення.

References

- Bilyi, O.G., & Laskin, I.S. (2025). *Vector potential of a solenoidal field*. Kyiv: National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". *XIII Vseukrainska naukova konferentsiia molodykh matematykyv*, 30–31.
<https://matan.kpi.ua/media/2025/young-math-2025/young-math-2025-abstracts.pdf>
- Fikhtengolts, G. M. (2022). *Kurs dyferentsialnoho ta integralnoho chyslennia. T. 1, T. 2. [Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1, Vol. 2] [in Ukrainian]*.
<https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net>
- MIT OpenCourseWare (2005). *Electromagnetics and Applications*. Massachusetts Institute of Technology.
<https://ocw.mit.edu/courses/6-013-electromagnetics-and-applications-fall-2005/>
- Piltyay, S. I. (2021). *Elektrodynamika ta poshyrennia radiokhvyli: Praktykum dlia studentiv spetsialnosti 172 "Telekomunikatsii ta radiotekhnika". [Electrodynamics and Propagation of Radio Waves: A Workbook for Students Majoring in Telecommunications and Radio Engineering] [in Ukrainian]*. Kyiv: National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute".
<https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/766dd8d0-ef40-433c-bda7-9ee17ede53ea/content>
- Pozrikidis, C. (2011). *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
<http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/26708/1/426.pdf>
- Wikipedia (2024). *Vector Potential*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_potential

В.О. Білий, І.С. Ласкін (2025). Векторний потенціал соленоїдального поля. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(2), 5–15.

Submitted: 2025-08-02

Accepted: 2025-09-15

V. O. Bilyi, I. S. Laskin (2025). Vector potential of a solenoidal field. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(2), 5–15.

Abstract. The article discusses examples of determining the vector potential of a solenoidal field, which is defined by the relation $\vec{F} = \nabla \times \vec{a}$, where $\vec{a}$ is the vector potential and ∇ is the Hamiltonian operator, as well as some of its applications. Unlike the case of a potential field, for which determining the scalar potential $u = u(x, y, z)$ is related to the path-independence of the corresponding line integral — a well-studied issue — the determination of a vector potential is significantly more complex and requires solving an appropriate system of first-order linear partial differential equations. It is noted that such a potential is defined up to the gradient of an arbitrary scalar function. The possibility of decomposing an arbitrary vector field into the sum of its potential and solenoidal components is also demonstrated. Examples of determining the vector potential for solenoidal and harmonic fields are provided. The obtained results can be applied to solving problems in electromagnetic field theory, mathematical physics, and applied mathematics.

Keywords: Vector fields; potential, solenoidal, and harmonic fields; vector potential of solenoidal and harmonic fields; Hamiltonian operator (∇); applications of vector potential.