

Рівномірний закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля в $\mathbb{R}^3$

О. В. Дикий¹, О. В. Іванов²

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна,

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3497-9726>

²Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна,

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5250-6781>

(¹National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Kyiv, Ukraine

²National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
Kyiv, Ukraine)

Анотація

У статті розглянуто вибірково неперервне гауссівське однорідне та ізотропне сильно залежне випадкове поле $\mathbb{R}^3$ та інтеграл за кубом $[0, T]^3$, який можна інтерпретувати як фінітне перетворення Фур'є цього поля. Доведено, що рівномірна за частотами норма такого усередненого інтеграла майже напевно збігається до нуля, якщо T прямує до нескінченості. Отриманий результат має самостійний математичний інтерес та може бути використаним у доведенні сильної консистентності оцінки найменших квадратів параметрів польових тригонометричних моделей регресії, в яких випадковий шум є випадковим полем описаного вигляду.

Ключові слова: однорідне та ізотропне випадкове поле, сильно залежне випадкове поле, повільно змінна на нескінченності функція.

MSC2010 62J02, 62J99

УДК 519.21

1 Вступ

Елементи класичної теорії випадкових полів разом з усіма поняттями цієї теорії, що використано у подальшому тексті, містяться, наприклад, у монографіях [1], [2].

Нехай $t = (t_1, t_2, t_3)$, $\|t\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$, $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^3\}$ є випадковим полем, заданим на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Зробимо наступне припущення.

A. ε – вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім і коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}^3$, що задовольняє одну з умов:

- (i) ε – ізотропне поле і $B(t) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|)/\|t\|^\alpha$, $\alpha \in (0, 2)$, з неспадною повільно змінною на нескінченності функцією L ;
- (ii) $B \in L_1(\mathbb{R}^3)$.

В основній частині роботи спочатку доведено посилений рівномірний закон великих чисел (ЗВЧ) за виконання умови **A(i)**. Після цього аналогічне твердження доведено за умови **A(ii)**.

2 Посилений рівномірний ЗВЧ

У цьому розділі доведено рівномірний посилений ЗВЧ для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля ε . Позначимо $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$. Аналогічний результат для поля ε на площині отримано в роботі [3].

Теорема 2.1. *Якщо виконано умову **A(i)**, то при $T \rightarrow \infty$*

$$\xi_3(T) = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^3} T^{-3} \left| \int_{[0,T]^3} e^{i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{м.н.} \quad (1)$$

Доведення. Позначимо вираз під знаком супремуму в (1) $\eta_3(\varphi; T)$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} \eta_3^2(\varphi; T) &= T^{-6} \int_{[0,T]^6} \exp\{-i\langle \varphi, t - s \rangle\} \times \\ &\quad \times \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_1 dt_2 dt_3 ds_1 ds_2 ds_3 = \\ &= T^{-6} \int_{[0,T]^4} \exp\{-i(\varphi_1(t_1 - s_1) + \varphi_2(t_2 - s_2))\} \times \\ &\quad \times \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_3(t_3 - s_3)} \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_3 ds_3 \right) dt_1 dt_2 ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Перетворимо внутрішній інтеграл в (2):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_3(t_3-s_3)} \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_3 ds_3 = \\
 & = \int_0^T \int_0^{T-u_3} e^{-i\varphi_3 u_3} \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dv_3 du_3 + \\
 & + \int_0^T \int_0^{T-u_3} e^{-i\varphi_3 u_3} \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dv_3 du_3.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
 \eta_3^2(\varphi; T) = T^{-6} & \int_0^T \int_0^{T-u_3} e^{-i\varphi_3 u_3} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \times \right. \right. \\
 & \times \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dt_2 ds_2) dt_1 ds_1) dv_3 du_3 + \\
 & + T^{-6} \int_0^T \int_0^{T-u_3} e^{i\varphi_3 u_3} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \times \right. \right. \\
 & \times \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dt_2 ds_2) dt_1 ds_1) dv_3 du_3 = I_3^1 + I_3^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Запишемо доданки I_3^1 та I_3^2 без множника T^{-6} та без двох початкових подвійних інтегралів:

$$\begin{aligned}
 I_3^1 = \dots & \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dt_2 ds_2 \dots = \\
 = \dots & \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{-i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_1, v_3) dv_2 du_3 \dots + \\
 & + \dots \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3) dv_2 du_3 \dots = \\
 & = I_{32}^{11} + I_{32}^{12};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 I_3^2 &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dt_2 ds_2 \dots = \\
 &= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{-i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3 + u_3) dv_2 du_2 \dots + \\
 &+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_2 du_2 \dots = \\
 &= I_{32}^{21} + I_{32}^{22}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Продовжуючи застосовування теореми Фубіні, отримуємо далі з (5) та (6)

$$\begin{aligned}
 I_{32}^{11} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
 &= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv_1 du_1 \dots + \\
 &+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv_1 du_1 \dots = \\
 &= I_{321}^{111} + I_{321}^{112};
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 I_{32}^{12} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
 &= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv_1 du_1 \dots + \\
 &+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv_1 du_1 \dots = \\
 &= I_{321}^{121} + I_{321}^{122};
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 I_{32}^{21} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3 + u_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
 &= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots + \\
 &\quad + \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots = \\
 &= I_{321}^{211} + I_{321}^{212};
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 I_{32}^{22} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
 &= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots + \\
 &\quad + \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots = \\
 &= I_{321}^{221} + I_{321}^{222}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В отриманих доданках (7) – (10) для зручності змінимо індекси за правилом:

$$I_{321}^{ijk} \rightarrow I_{123}^{kji} \rightarrow I^{kji}, \quad i, j, k = 1, 2, \tag{11}$$

причому i , або j , або k дорівнюють ”1”, коли на 1-му, або 2-му, або 3-му місці під знаком ε 1-го множника стоїть сума $v + u$ з відповідними індексами, і дорівнюють ”2”, коли стоїть змінна v з відповідними індексами.

Тепер всі заміни змінних, які ми робили вище, можна записати у вигляді наступної схеми.

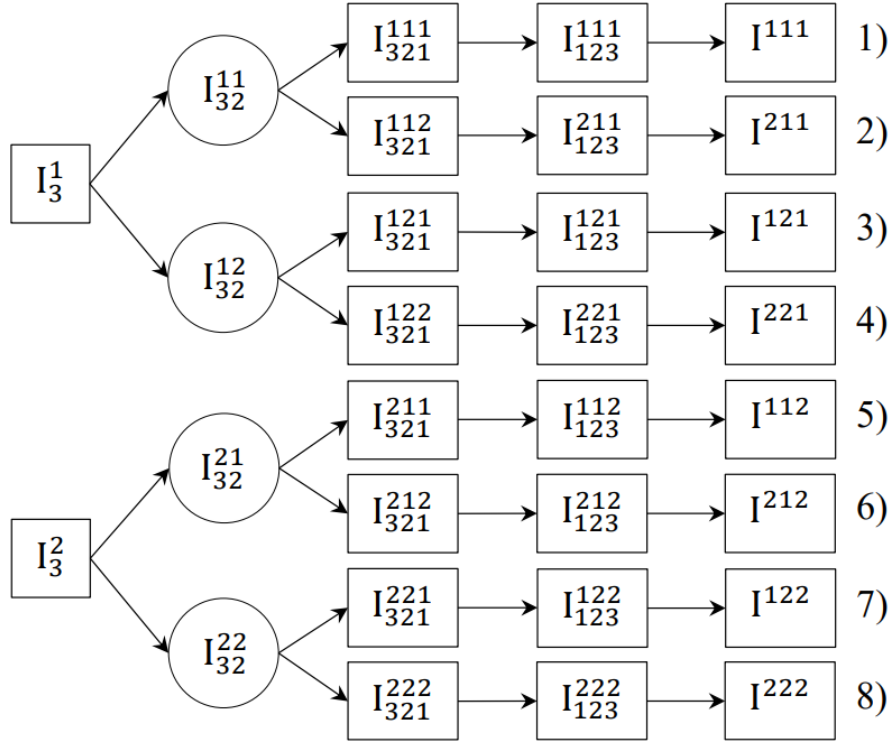


Рис. 1: Заміна змінних.

Ми бачимо, що отримаємо 8 доданків після вказаних заміни змінних.

Позначимо $dv = dv_1 dv_2 dv_3$, $du = du_1 du_2 du_3$ та запишемо повністю інтеграли, що перенумеровано на Рис. 1.

$$1) I^{111} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(-\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times$$

$$\times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv du;$$

$$2) I^{211} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times$$

$$\times \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv du;$$

$$3) I^{121} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times$$

$$\times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv du;$$

$$4) I^{221} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv du; \\
 5) \quad I^{112} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(-\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
 & \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) dv du; \\
 6) \quad I^{212} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
 & \times \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) dv du; \\
 7) \quad I^{122} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
 & \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv du; \\
 8) \quad I^{222} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp \{i(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
 & \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv du.
 \end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що в інтегралах 1) – 8) під знаком експонент стоять "мінуси" перед доданками там, де у 1-му множнику ε записано суми $u + v$ з відповідними індексами, а "плюси" стоять там, де у 1-му множнику ε знаходяться змінні v з відповідними індексами (індекс "2" у позначеннях I там, де стоїть "+" в експоненті; індекс "1" там, де стоїть "-").

Зважаючи на формули 1) – 8), запишемо ці знаки у вигляді наступної таблиці.

1)	-	-	-	
2)	+	-	-	
3)	-	+	-	
4)	+	+	-	
5)	-	-	+	
6)	+	-	+	
7)	-	+	+	
8)	+	+	+	

Рис. 2: Комплексно спряжені доданки.

Легко побачити, що серед доданків 1) – 8) є 4 пари комплексно спряжених чисел, як це показано на Рис. 2. Таким чином,

$$\begin{aligned}
 \eta_3^2(\varphi; T) &= 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3) \times \\
 &\times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv du + \\
 &\quad + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
 &\times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv du + \\
 &\quad + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
 &\times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv du + \\
 &\quad + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
 &\times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv du.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Далі з (12) та теореми Фубіні отримуємо

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \xi_3^2(T) &= \mathbb{E} \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^3} \eta_3^2(\varphi; T) \leq \\
 &\leq 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv \right| du + \\
 &\quad + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv \right| du +
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv \right| du + \\
 & + 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv \right| du \leq \\
 & \leq 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sum_{j=1}^4 \Psi^{1/2}(u) du.
 \end{aligned}$$

Користуючись позначеннями $w = (w_1, w_2, w_3)$,

$\Pi_T(u) = [0, T - u_1] \times [0, T - u_2] \times [0, T - u_3]$, запишемо

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \times \\
 & \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1, w_2, w_3) dv dw;
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) \times \\
 & \times \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3) dv dw;
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_3(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \times \\
 & \varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3) dv dw;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_4(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) \times \\
 & \varepsilon(w_1, w_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3) dv dw.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Для оцінювання інтегралів (14) – (17) застосуємо формулу Ісерліса [2]. Якщо $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ – гауссівський вектор з нульовим середнім, то

$$\mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathbb{E} \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mathbb{E} \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_4 \mathbb{E} \varepsilon_2 \varepsilon_3. \tag{18}$$

За формулою (18) отримуємо

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3) + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
 &\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\
 &\quad = \Psi_{11}(u) + \Psi_{12}(u) + \Psi_{13}(u);
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(-u_1, u_2, u_3) + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
 &\quad \times B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\
 &\quad = \Psi_{21}(u) + \Psi_{22}(u) + \Psi_{23}(u);
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_3(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, -u_2, u_3) + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
 &\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\
 &\quad = \Psi_{31}(u) + \Psi_{32}(u) + \Psi_{33}(u);
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_4(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, -u_3) + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
 &\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 - u_3) \times \\
 &\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 + u_3) dv dw = \\
 &\quad = \Psi_{41}(u) + \Psi_{42}(u) + \Psi_{43}(u).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Із формул (13) та (19) – (22) випливає, що

$$\mathbb{E}\xi_3^2(T) \leq 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^3 T^{=6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{jk}^{1/2}(u) du. \quad (23)$$

Оцінімо спочатку величину $\Psi_{13}(u)$. Позначимо

$$\begin{aligned} & B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\ & \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) = \\ & = b_u^{(1)}(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3). \end{aligned}$$

Застосовуючи відому в теорії стаціонарних процесів заміну змінних, отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi_{13} &= \int_{\Pi_T^2(u)} b_u^{(1)}(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw = \\ &= (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} \left(1 - \frac{|t_1|}{T - u_1}\right) \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{|t_2|}{T - u_2}\right) \left(1 - \frac{|t_3|}{T - u_3}\right) b_u^{(1)}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \\ &= |t_i \rightarrow Tt_i, i = 1, 2, 3| = \\ &= T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(1-u_1T^{-1})}^{1-u_1T^{-1}} \int_{-(1-u_2T^{-1})}^{1-u_2T^{-1}} \int_{-(1-u_3T^{-1})}^{1-u_3T^{-1}} \times \\ &\quad \times b_u^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\ &\leq T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{[-1,1]^3} b_u^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & 2T^{=6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{13}^{1/2}(u) du = |u_i \rightarrow Tu_i| = 2T^{-3} \int_{[0,1]^3} \psi_{13}^{1/2}(Tu) du \leq \\ & \leq 2 \int_{[0,1]^3} \sqrt{(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \int_{[-1,1]^3} b_{Tu}^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt} du. \end{aligned} \quad (25)$$

Розглянемо інтеграл під знаком кореня в формулі (25):

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^3} b_{Tu}^{(1)}(Tt) dt &= \int_{[-1,1]^3} \tilde{B}(T\|t+u\|) \tilde{B}(T\|t-u\|) dt = \\ &= \int_{[-1,1]^3} \frac{L(T\|t+u\|)}{T^\alpha \|t+u\|^\alpha} \cdot \frac{L(T\|t-u\|)}{T^\alpha \|t-u\|^\alpha} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишемо, у свою чергу, інтеграл (26) у вигляді суми 8 інтегралів, а саме:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 &= 1] \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 + 2] \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 + 3] \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 + 4] \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 + \\ &+ 5] \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 + 6] \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 + 7] \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 + 8] \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1. \end{aligned} \quad (27)$$

Якщо функція L монотонно не спадає, як це припускається в умові **A(i)**, то чисельники в (26) завжди можна оцінити наступним чином:

$$L(T\|t \pm u\|) \leq L(2\sqrt{3}T) < (1 + \varepsilon) L(T) \quad (28)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $T > T(\varepsilon)$.

Знаменники в (26) треба оцінювати обережніше. Розглянемо послідовно всі інтеграли правої частини (27), у яких завжди $u_1, u_2, u_3 \geq 0$.

1] $t_1, t_2, t_3 \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{B}(T\|t+u\|) \tilde{B}(T\|t-u\|) &\leq \tilde{B}(0) \tilde{B}(T\|t+u\|), \\ \frac{1}{T^\alpha \left((t_1+u_1)^2 + (t_2+u_2)^2 + (t_3+u_3)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}} &\leq \frac{1}{T^\alpha \|t\|^\alpha}, \end{aligned}$$

та інтеграл

$$\begin{aligned} 1] &\leq \frac{\tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) L(T)}{T^\alpha} \int_{V(\sqrt{3})} \|t\|^{-\alpha} dt = \\ &= \tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) J(3) L(T) T^{-\alpha} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^{2-\alpha} d\rho = \\ &= \tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) J(3) \frac{(\sqrt{3})^{3-\alpha}}{3-\alpha} \frac{L(T)}{T^\alpha}, \end{aligned} \quad (29)$$

де $J(n) = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $n \geq 2$ (див. [4], с. 403).

2] $t_1, t_2, t_3 \leq 0$. Тоді

$$\tilde{B}(T \|t + u\|) \tilde{B}(T \|t - u\|) \leq \tilde{B}(0) \tilde{B}(T \|t + u\|),$$

і для інтеграла (2) отримуємо оцінку (29).

3] $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \leq 0$. Тоді за (26)

$$\begin{aligned} 3] &\leq \frac{\tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) L(T)}{T^\alpha} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \left((t_2 - u_2)^2 + (t_3 - u_3)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} dt_2 dt_3 \leq \\ &\leq \tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) L(T) T^{-\alpha} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 (t_2^2 + t_3^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dt_2 dt_3 \leq \\ &\leq \tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) L(T) T^{-\alpha} \int_{V(\sqrt{2})} \|t\|^{-\alpha} dt = \\ &= \tilde{B}(0) (1 + \varepsilon) L(T) T^{-\alpha} \frac{2\pi (\sqrt{2})^{2-\alpha}}{2-\alpha}. \end{aligned} \quad (30)$$

4] $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$. Інтеграл оцінюється як 3].

5] $t_1 \leq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється як 3].

6] $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$. Інтеграл оцінюється як 3], але треба скористатися нерівністю

$$\tilde{B}(T \|t + u\|) \tilde{B}(T \|t - u\|) \leq \tilde{B}(0) \tilde{B}(T \|t + u\|).$$

7] $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється аналогічно 6].

8] $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється аналогічно 6].

Таким чином, інтеграл під знаком кореня в (25) можна оцінити величиною порядку $O(\tilde{B}(T)) = O(L(T) T^{-\alpha})$, що не залежить від змінних $u = (u_1, u_2, u_3)$, як тільки $\alpha < 2 = 3 - [\frac{3}{2}]$. Це означає, що в правій частині (23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{13}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Розглянемо величину $\Psi_{23}(u)$ аналогічно $\Psi_{13}(u)$. Зараз інтеграл, аналогічний інтегралу (26), має вигляд

$$\begin{aligned} &\int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 - u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 + u_3)) \times \\ &\times B(T(t_1 + u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 - u_3)) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Маємо послідовно

1] $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник у (32) оцінюємо $B(0)$, для 1-го отримуємо оцінку (30),

завдяки тому, що $t_2, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

2] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник оцінюємо $B(0)$, для 2-го є вірною оцінка (20), так як $t_2, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

3] $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (29), тому що $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 3$).

4] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (30), тому що $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

5] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (30), тому що $t_1 \leq 0, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

6] $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (30), тому що $t_1 \geq 0, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

7] $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (30), тому що $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

8] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (29), тому що $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3$).

Це означає, що для $\alpha < 2$ в (23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{23}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Розглянемо величину $\Psi_{33}(u)$ та відповідний аналогічний інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 + u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 + u_3)) \times \\ & \times B(T(t_1 - u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 - u_3)) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Отримаємо для нього

1] $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник оцінюємо $B(0)$, 1-ий оцінюємо (30), так як $t_1, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

2] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, для 2-го множника маємо (30), так як $t_1, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

3] $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, для 1-ого отримаємо (30), завдяки тому, що $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

4] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, для 2-го є вірною оцінка (29), завдяки нерівностям $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 3$ ($\alpha < 3$).

5] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (30), тому що $t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

6] $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (30), тому що $t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

7] $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий множник оцінюємо (29), тому що $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3$).

8] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, а в 2-му $t_1 \leq 0, t_2 \geq 0$ і ми оцінюємо його (30) ($\alpha < 2$).

Таким чином, для $\alpha < 2$ в (23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{33}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Нарешті, розглянемо величину $\Psi_{43}(u)$ та відповідний їй інтеграл

$$\int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 + u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 - u_3)) \times \\ \times B(T(t_1 - u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 + u_3)) dt. \quad (36)$$

Для цього інтеграла отримуємо

1] $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник у (36) обмежуємо $B(0)$, для 1-го множника маємо оцінку (30), тому що $t_1, t_2 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

2] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, $t_1, t_2 \leq 0$ у 2-му множнику, і тому він оцінюється (30) ($\alpha < 2$).

3] $\int_{-1}^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, а в 1-му $t_1 \geq 0, t_3 \leq 0$, тобто є вірною оцінка (30) ($\alpha < 2$).

4] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, в 1-му $t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$, і ми отримуємо оцінку (30) ($\alpha < 2$).

5] $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_1 \leq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$, і ми маємо оцінку (29) ($\alpha < 3$).

6] $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, та $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$ у 1-му множнику. Таким чином, є вірною оцінка (29) ($\alpha < 3$).

7] $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$, і є вірною оцінка (30) ($\alpha < 2$).

8] $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_1 \leq 0, t_3 \geq 0$, тобто виконується (30) ($\alpha < 2$).

Таким чином, для $\alpha < 2$ в (23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{43}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Повертаючись до формул (13) – (23), з урахуванням співвідношень (31), (33), (35) та (37), ми можемо стверджувати, що при $\alpha < 2$

$$2 \sum_{j=1}^4 T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{j3}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right). \quad (38)$$

З іншого боку, з (19) – (22) випливає, що

$$\begin{aligned} & \Psi_{12}(u) = \Psi_{22}(u) = \Psi_{32}(u) = \Psi_{42}(u) = \\ & = \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw, \end{aligned} \quad (39)$$

тобто в правій частині нерівності (23) треба оцінити величину

$$\begin{aligned}
 & 8T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{12}^{\frac{1}{2}}(u) du = \\
 & = 8T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sqrt{\int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw} du.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Маємо

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw = \\
 & = (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} \left(1 - \frac{|t_1|}{T - u_1}\right) \times \\
 & \quad \times \left(1 - \frac{|t_2|}{T - u_2}\right) \left(1 - \frac{|t_3|}{T - u_3}\right) B^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \\
 & = |t_i \rightarrow Tt_i, i = 1, 2, 3| = T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \times \\
 & \quad \times \int_{-(1-u_1T^{-1})}^{1-u_1T^{-1}} \int_{-(1-u_2T^{-1})}^{1-u_2T^{-1}} \int_{-(1-u_3T^{-1})}^{1-u_3T^{-1}} \left(1 - \frac{|t_1|}{1 - u_1T^{-1}}\right) \left(1 - \frac{|t_2|}{1 - u_2T^{-1}}\right) \times \\
 & \quad \times \left(1 - \frac{|t_3|}{1 - u_3T^{-1}}\right) B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\
 & \leq T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3.
 \end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $T > T(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 & 8T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{12}^{\frac{1}{2}}(u) du = |u_i \rightarrow Tu_i, i = 1, 2, 3| \leq \\
 & = \left(8T^{-6} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{T^3 (T - Tu_1)(T - Tu_2)(T - Tu_3)} du \right) \times \\
 & \quad \times \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3} = \\
 & = \frac{64}{27} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (41) \\
 & \leq \frac{64}{27} \tilde{B}(0) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(T\|t\|) T^{-\alpha} \|t\| dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq \frac{64}{27} \tilde{B}^{\frac{1}{2}}(0) (1 + \varepsilon) L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{V(\sqrt{3})} \|t\|^{-\alpha} dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = \frac{64}{27} \tilde{B}^{\frac{1}{2}}(0) (1 + \varepsilon) J^{\frac{1}{2}}(3) \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^{2-\alpha} d\rho \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}} = O\left(L^{\frac{1}{2}}(T) T^{-\frac{\alpha}{2}}\right),
 \end{aligned}$$

при $T \rightarrow \infty$, як тільки $\alpha < 3$.

Залишилось розглянути величини

$$\begin{aligned}
 \Psi_{11}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3), \\
 \Psi_{21}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(-u_1, u_2, u_3), \\
 \Psi_{31}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, -u_2, u_3), \\
 \Psi_{41}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, -u_3)
 \end{aligned} \quad (42)$$

та інтеграли від них. Зокрема, маємо для $\alpha < 3$

$$\begin{aligned}
 & 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{11}^{\frac{1}{2}}(u) du = \\
 & = 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sqrt{(T-u_1)^2 (T-u_2)^2 (T-u_3)^2 \tilde{B}^2(\|u\|)} du \leqslant \\
 & \leqslant 2T^{-3} \int_{[0,T]^3} \tilde{B}(\|u\|) du = |u \rightarrow Tu| = \\
 & = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}(T\|u\|) du = O(L(T) T^{-\alpha}), \quad T \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{43}$$

як це було доведено вище. Лише треба зауважити, що інтеграли від $\Psi_{21}^{\frac{1}{2}}(u)$, $\Psi_{31}^{\frac{1}{2}}(u)$, $\Psi_{41}^{\frac{1}{2}}(u)$ оцінюються так само, як інтеграл від $\Psi_{11}^{\frac{1}{2}}(u)$ величиною (43).

Беручи до уваги нерівність (23), ми можемо стверджувати, що

$$\mathbb{E}\xi_3^2(T) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \tag{44}$$

Як наслідок, за нерівністю Чебишева отримуємо

$$\xi_3^2(T) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \tag{45}$$

Враховуючи нерівність (23), за формулою (19) отримуємо

$$\begin{aligned}
 \Psi_{13}(u) & \leqslant \int_{\Pi_T^2(u)} |B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3)| \times \\
 & \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) |dvdu| \leqslant \\
 & \leqslant (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} |B(t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3)| \times \\
 & \times |B(t_1 - u_1, t_2 - u_2, t_3 - u_3)| dt_1 dt_2 dt_3 \leqslant (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \|B\|_1 B(0), \\
 & \text{де } \|B\| = \int_{\mathbb{R}^3} |B(t_1, t_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3 < \infty;
 \end{aligned}$$

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{13}^{\frac{1}{2}}(u) du \leqslant 2B^{\frac{1}{2}}(0) \|B\|_1^{\frac{1}{2}} T^{-6} T^{\frac{3}{2} \cdot 3} = O\left(T^{-\frac{3}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \tag{46}$$

Користуючись формулами (20) – (22), так само отримуємо, що для $j = 2, 3, 4$

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{j3}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(T^{-\frac{3}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Зауважимо далі, що величини $\Psi_{j2}(u)$, $j = \overline{1,4}$, – збігаються (див. (39)), і для інтегралів від них отримуємо оцінку аналогічну (47):

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{12}^{\frac{1}{2}}(u) du = O\left(T^{-\frac{3}{2}}\right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (48)$$

За формулою (19)

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3), \\ 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{11}^{\frac{1}{2}}(u) du &= 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \times \\ &\quad \times |B(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3 \leq 2 \|B\|_1 T^{-3}. \end{aligned} \quad (49)$$

Решта величин $\Psi_{21}(u)$, $\Psi_{31}(u)$, $\Psi_{41}(u)$ (див. (42)) оцінюються аналогічно.

Покажемо, що за умови **A(i)** зі співвідношення (48) випливає твердження (1) теореми. Розглянемо послідовність $T_n = n^\beta$, $n \geq 1$, де число $\beta > 0$ таке, що $\frac{1}{2}\alpha\beta > 1$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_3^2(T) \leftarrow \infty. \quad (50)$$

і $\xi_3(T_n) \rightarrow 0$ м.н., при $n \rightarrow \infty$. Розглянемо також послідовність випадкових величин

$$\begin{aligned} \eta_n &= \sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} |\xi_3(T) - \xi_3(T_n)| \leq \\ &\leq \sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^3} \left| T^{-3} \int_{[0,T]^3} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-3} \int_{[0,T_n]^3} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Маємо послідовно

$$\begin{aligned}
 & \left| T^{-3} \int_{[0,T]^3} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-3} \int_{[0,T_n]^3} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| = \\
 & = \left| T^{-3} \int_{[0,T]^3 \cup ([0,T]^3 \setminus [0,T_n]^3)} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-3} \int_{[0,T_n]^3} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| \leqslant \quad (51) \\
 & \leqslant |T^{-3} - T_n^{-3}| \left| \int_{[0,T_n]^3} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| + T^{-3} \int_{[0,T]^3 \setminus [0,T_n]^3} |\varepsilon(t)| dt = J_1 + J_2;
 \end{aligned}$$

$$J_1 \leqslant \left(\frac{T_{n+1}^3}{T_n^3} - 1 \right) \xi_3(T_n) \rightarrow 0 \text{ м.н.}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

так як при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_{n+1}^3}{T_n^3} - 1 = \frac{(n+1)^{3\beta}}{n^{3\beta}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3\beta} - 1 = O(n^{-1}),$$

а $\xi_3(T_n) \rightarrow 0$ м.н.

З іншого боку

$$J_2 \leqslant T_n^{-3} \int_{[0,T_{n+1}]^3 \setminus [0,T_n]^3} |\varepsilon(t)| dt. \quad (53)$$

Розглянемо далі формальне «множення» інтегралів, яке, насправді, є застосування закону дистрибутивності операцій прямого множення та об'єднання множин:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} = \\
 & = \left(\int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \right) = \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \\
 & \quad + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \\
 & \quad + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}}.
 \end{aligned} \quad (54)$$

В останній сумі інтегралів нижні межі інтегрування утворюють повну сукупність бінарних наборів символів 0 та T_n , і тому

$$T_n^{-3} \int_{[0, T_{n+1}]^3 \setminus [0, T_n]^3} |\varepsilon(t)| dt = T_n^{-3} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^{C_3^k} \int_{\{b_{ik}(n)\}} |\varepsilon(t_1, t_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3, \quad (55)$$

де $\int_{\{b_{ik}(n)\}}$ – 3-кратні інтеграли, в яких $k \geq 1$ інтегралів $\int_{T_n}^{T_{n+1}}$ та $3 - k$ інтегралів $\int_0^{T_n}$, а $b_{ik}(n)$ позначено відповідні бінарні набори символів 0 та T_n довжини 3.

Покажемо, що кожний доданок в (55), який ми позначимо $J_{ik}(n)$, збігається до нуля м.н. при $n \rightarrow \infty$. Для цього розглянемо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} J_{ik}^2(n) &= T_n^{-6} \int_{\{b_{ik}(n)\}} \int_{\{b_{ik}(n)\}} \mathbb{E} \left| \varepsilon \left(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, t_3^{(1)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \varepsilon \left(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, t_3^{(2)} \right) \right| dt_1^{(1)} dt_2^{(1)} dt_3^{(1)} dt_1^{(2)} dt_2^{(2)} dt_3^{(2)} \leq \\ &\leq B(0) T_n^{-6} (T_{n+1} - T_n)^{2k} T_n^{6-2k} = B(0) \left(\frac{T_{n+1}}{T_n} - 1 \right)^{2k} = \\ &= B(0) \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\beta - 1 \right)^{2k} = O(n^{-2k}). \end{aligned}$$

Оскільки $k \geq 1$, то всі наступні ряди збігаються:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} J_{ik}^2(n) < \infty, \quad i = \overline{1, C_3^k}, \quad k = \overline{1, 3},$$

тобто

$$J_2 \rightarrow 0 \text{ м.н.}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (56)$$

і теорему 1. доведено, так як доведення останньої частини теореми у випадку виконання умови **A(ii)** не відрізняється від випадку виконання умови **A(i)**. $\square$

3 Висновки

У роботі отримано рівномірний за частотами посилений ЗВЧ для фінітного перетворення Фур'є однорідного та ізотропного гауссівського випадкового поля на $\mathbb{R}^3$, коваріаційна функція якого задовольняє умовам, котрі охоплюють випадки слабкої та сильної консистентності цього поля.

Саме такий ЗВЧ є основним математичним фактом, на який спирається доведення сильної консистентності оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд та кутових частот у польовій тригонометричній моделі регресії з описаним вище випадковим полем у якості шуму.

Природним напрямком продовження цього дослідження є ЗВЧ для локальних перетворень Фур'є випадкових полів на $\mathbb{R}^M$, $M \geq 3$, з метою застосування цих ЗВЧ у доведенні сильної консистентності оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричних моделей M -вимірних текстурованих поверхонь.

References

- [1] М. І. Yadrenko. Spectral Theory of Random Fields, *Springer*, 1983.
- [2] А. V. Ivanov, N. N. Leonenko. Statistical Analysis of Random Fields, *Kluwer AP, Dordrecht*, 1989.
- [3] А. V. Ivanov, О. V. Malyar. Consistency of the least squares estimator for the parameters of a sinusoidal model of a textured surface, *Theor. Probab. Math. Statist.*, 97(2018), 73–84.
- [4] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3 *Наука*, 1966.

О. В. Дикий, О. В. Іванов (2025). Рівномірний закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля в $\mathbb{R}^3$. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(1), 19–42.

Submitted: 2022-07-22

Accepted: 2022-08-15

О. V. Dykyi, А. V. Ivanov (2025). Uniform law of large numbers for finite Fourier transform of a random field on $\mathbb{R}^3$. *Mathematics in Modern Technical University*, 2025(1), 19–42.

Abstract. In the paper a sample continuous Gaussian homogeneous and isotropic strongly dependent random fields on $\mathbb{R}^3$ is a considered along with integral over the cube $[0; T]^3$ which can be interpreted as a finite Fourier transform of this field. It is proved that uniform in frequencies norm of such an averaged integral vanishes almost surely, as T tends to infinity. The result obtained is of independent mathematical interest in the theory of random fields and can be used in statistics of random fields and can be used in statistics of random fields. In particular it can be used to prove the strong consistency of the least squares estimate of unknown amplitudes and angular frequencies in trigonometric regression models where under the signs of sines and cosines are linear forms of frequencies and the random noise is the field described above. Similar models on the plane were studied in numerous signal processing publications thanks to their application in texture analysis, in particular for symmetrical textured images processing. The uniform strong law of large numbers obtained in the paper allows one to study three-dimensional symmetric textured surfaces.

Keywords: homogeneous and isotropic random field; strongly dependent random field; slowly varying at infinity function.