Mathematics in Modern Technical University
ISSN 2664-4258

Mathematics in Modern Technical University, 2025(1), 5 -18
10.20535/mmtu-2025.1-005

Дельта-функція Дірака. Основні властивості та застосування

О.Г. Білий[1], В.О. Білий[2], В.В. Марчук[3]

[1]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна,* ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1377-0066
(National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine)

[2]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна,* ORCID ID: https://orcid.org/0009-0001-9696-1679
(Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, Ukraine),

[3]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна*
(National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine)

Анотація

В статті розглянуто деякі некласичні визначення δ- функції Дірака, її введення в квантову механіку та математику як «екзотичної» розривної функції, не строго визначеної, але доволі вдалої для застосування при розгляді процесів, деякі характеристики яких змінюються майже миттєво. Зручність її полягає в тому, що вона сама будучи «дуже розривною», допомагає навести лад в дослідженнях саме розривних функцій. Розглянуто також деякі аспекти строгого визначення цієї функції як сингулярної функції – розподілу Дірака, визначено її властивості та застосування в багатьох розділах математики та фізики. Проведено порівняльний аналіз класичного та некласичного підходу до визначення дельта функції. Відмічено, що більш широка множина функцій розподілів включає в себе множину всіх раніше розглянутих класичних функцій та дає можливість поглибити область застосування методів математичного аналізу в дослідженнях процесів, що

belyi.oleksandr@gmail.com

Cite as: Bilyi, O.G., Bilyi, V.O., & Marchuk, V.V. (2022). Dirac delta function. Main properties and applications. *Mathematics in Modern Technical University*, 2022(1), 5 – 18. 10.20535/mmtu-2022.1-005

відбуваються в природі. Вказано її важливість в застосуванні спектрального аналізу Фур’є та операційного числення Лапласа для дослідження дискретних та неперервних сигналів. Наведені приклади застосування дельта функції в механіці, радіотехніці та в теорії ймовірностей. Розглянуто теорему відліків WKS та її застосування для дискретної передачі неперервних неперіодичних сигналів з обмеженим спектром. Зазначено технічні можливості такої передачі.

Ключові слова: δ – функція Дірака, розривна функція, лінійний неперервний функціонал, компакт, носій, регулярний та сингулярний розподіли, похідна δ – функції, фільтруюча властивість δ – функції, ряд Фур’є, спектральна функція, інтегральне перетворення Лапласа, неперервний сигнал з обмеженим спектром, теорема відліків WKS, діафрагми, фільтри, дифракційні решітки, дискретний сигнал.

MSC2010 40-01

УДК 517.52

1 Основні поняття

Відомий англійський фізик-теоретик Поль Дірак запропонував в 1929 році застосовувати в теоретичних дослідженнях незвичайну, але дуже підходящу функцію для не менш дивної на той час квантової фізики. Формально ця функція виглядала так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \quad t \neq 0 & (1) \\ \infty, \quad t = 0 & (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 & (3) \end{cases}$$

Як бачимо $\delta(t)$ визначена зовсім не класичним способом і дуже не схожа на звичайні функції.

Для означення $\delta(t)$ функції можна, використовуючи граничний перехід, розглянути такі варіанти :

1) $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, |t| > \varepsilon > 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon}, |t| < \varepsilon \end{cases}$, 2) $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, t < 0, t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}, \ 0 < t < \varepsilon \end{cases}$,

3) $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, \ t > \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, \ t \in (-\varepsilon; \ 0), \\ -\frac{t}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, \ t \in (0; \ \varepsilon) \end{cases}$ тоді $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$.

Хоча ця функція визначена незвично і зовсім нестрого з точки зору класичної математики, але її обережне (з пересторогами) застосування дає деякі переваги і зрозумілі пояснення природи тих явищ та процесів, які за допомогою класичної математики приводили до непорозуміння. Пізніше математики строго визначили цю функцію як представника цілого класу так званих узагальнених функцій-розподілів. Властивості $\delta -$ функцій були строго обґрунтовані і вона посіла чільне, хоча і особливе, місце в арсеналі методів дослідження природи. Зручність її полягає в тому, що вона сама будучи, «дуже розривною», допомагає навести лад саме в дослідженнях розривних функцій.

2 Основні властивості

Розглянемо (без строгого обґрунтування) деякі властивість δ – функції.

1. Наступні рівності, наряду з 1), 2) та 3) можуть бути еквівалентними означеннями δ – функції:

а) $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}, \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} -\right.$ інтеграл Пуассона$\left.\right)$;

б) $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}, \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\right)$;

в) $\delta(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi -\right.$ інтеграл Діріхле).

2. $\delta(x) = \delta(-x)$ – функція парна.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$: $\quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = 1. \end{cases}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$ – основна, дуже важлива властивість δ – функції для неперервної $f(x)$.

5. $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$, $\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{|\varphi'(0)|}\delta$, якщо $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) \neq 0. \end{cases}$

6. Для одиничної функції Хевісайда $\eta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$, маємо

$\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx$.

7. Для функції

$sgn\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $(sgn\, x = 2\eta(x) - 1)$, $sgn\, x = 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx - 1$.

8. Для функції стрибка $\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\frac{1}{2}, x < 0 \end{cases}$; $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(sgn\, x)}{dx} = \delta(x)$.

9. $F_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx = e^{-i\omega x}\big|_{x=0} = 1$ – спектральна функція.

10. $F_\delta(\omega) = 1$, тому $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{i\omega x}d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega x + i \sin \omega x)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \omega x\, d\omega.$$

11. $\gamma(x) = \int_0^x \delta(x)dx = \int_0^x \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \omega x\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega$

При x=1, маємо $\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$ (інт. Дирихле).

12. Якщо $x \in (0; \pi)$, то справедливі рівності (розклад δ – функції в ряд Фур'є):

$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=\frac{\pi}{2}\delta(x);$
$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n-1)x=\frac{\pi}{2}(\delta(x)-\delta(2x));$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos nx=\frac{\pi}{2}\big(2\delta(2x)-\delta(x)\big).$$

13. Зображення по Лапласу $\delta(t) \doteqdot \int_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt =$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty}\delta_\varepsilon(t)e^{-pt}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}e^{-pt}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon p}=1.$$

Формально за формулою Рімана-Мелліна, маємо

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty}e^{pt}dp,\qquad \text{де}\quad p=s+i\sigma.$$

14. Справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-x)\delta(x-c)dx=\delta(y-c).$$

15. В $\mathbb{R}^2$ можна визначити $\delta(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0;0\}\\ \infty, & x=y=0\\ \iint_{\mathbb{R}^2}\delta(x,y)dxdy=1\,, & \end{cases}$

тоді $\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)$.
Або в $\mathbb{R}^n$:

$$\delta(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i).$$

16. Розглянемо тепер похідну від $\delta(x)$. Для того щоб наглядно з'ясувати характер поведінки $\delta'(x)$, виберемо еквівалентне формальне визначення 3), тобто

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & |x|>\varepsilon\\ \frac{x}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}, & x\in(-\varepsilon;\ 0)\\ -\frac{x}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}, & x\in(0;\ \varepsilon)\end{cases};\ \text{тоді}\quad \delta'_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & |x|>\varepsilon\\ \frac{1}{\varepsilon^2}, & x\in(-\varepsilon;\ 0)\\ -\frac{1}{\varepsilon^2}, & x\in(0;\ \varepsilon)\end{cases};$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x),\quad \delta'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta'_\varepsilon(x).$$

Ясно, що *$\delta'(x)$* - непарна функція і має ще «більшу» особливість різних знаків в точці $x = 0$, ніж δ(x), а саме в т. $x = 0$ розриви функції $\delta'(x)$ порядка $\pm\frac{1}{\varepsilon^2}$, в той час коли для δ(x) ці розриви становлять $\frac{1}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$.

3 Дельта – функція як сингулярний розподіл

Зусиллями багатьох математиків, в першу чергу Л. Шварца та С. Соболєва знайдено математично коректне визначення узагальнених функцій - розподілів та їх похідних як лінійних неперервних функціоналів над деяким простором основних функцій, що дозволило значно розширити область застосування класичного математичною аналізу.

Розглянемо множину $\{\varphi\}$ всіх числових нескінченно диференційованих фінітних функцій $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, m \geq 1,$ яку назвемо простором $\mathcal{D}$ основних функцій, тобто $(\varphi \in \mathcal{D}) \Leftrightarrow (\varphi \in \mathrm{C}^\infty, \exists\, K \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 1: \varphi(x \notin K\,) \equiv 0)$, де К-компакт, тобто обмежена замкнена підмножина $\mathbb{R}^m$. Наприклад, при m=1 функція $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ належить $\mathcal{D}$, якщо $\varphi(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, тут константа С вибрана так, щоб $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 1$. Таку функцію φ називають «шапочкою», а функцію $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, де $x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ називають " ε -шапочкою. Тоді всякий лінійний функціонал L, неперервний на просторі D основних функцій називається розподілом. Наприклад, якщо $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ локально інтегрована на довільному компакті $K \subset \mathbb{R}^m$, то вона визначає лінійний неперервний функціонал L_f за формулою $\left(L_f, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx -$ скалярний добуток, де $m \geq 1, \varphi \in D$. Тоді L_f - називається **регулярним розподілом**, і позначається $(L_f, \varphi) = (f, \varphi)$. Якщо ж лінійний неперервний функціонал L ставить у відповідність кожній функції $\varphi \in D$ її значення в т. $x\ =\ 0$, то він називається **сингулярним $\boldsymbol{\delta}$ − розподілом Дірака**, а його значення отримаємо за формулою:

$(L, \varphi) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$, або при $m = 1$:

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{K(0\epsilon K)} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

оскільки носієм $\delta(x)$ (тобто найменшою замкненою множиною, поза межами якої $L = \delta$=0) являється єдина точка $x = 0$. Це означає, що $\varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)$ - **фільтруюча властивість $\boldsymbol{\delta}$ -функції** (δ -розподілу).

Рівність $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ - є основною (визначальною), для одновимірної $\delta -$ функції Дірака, звідси випливають всі три умови формального визначення δ - функції, а саме:

(1) $\delta(x) = 0,$ при $x \neq 0$ (бо $x = 0 -$ носій)

(2) $\delta(0) = \infty$

(3) При $\varphi(x) \equiv 1$ маємо $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1dx = 1$

Також можна показати, що значення регулярного функціонала (f, φ) на основних функціях однозначно, з точністю до значень на множині міри 0, визначають відповідну функцію f. Тобто всю сукупність звичайних локально інтегрованих функцій можна розглядати як деяку частину сукупності всіх розподілів, наприклад, розподіл 1 буде $(1, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx, \quad m \geq 1.$

Розглянемо тепер похідну функцій розподілу.

Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервно диференційована функція, тоді $f' -$ це функціонал $(f', \varphi),$ де $\varphi \in D$ Далі маємо:

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x) \cdot \varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = (f, -\varphi'),$$

(за формулою інтегрування частинами).

Таким чином маємо $(L', \varphi) = -(L, \varphi') = (L, -\varphi')$ – ця рівність і визначає похідну розподілу L , яка також є лінійним неперервним функціоналом. Аналогічно можна визначити похідні розподілів вищих порядків, які існують і теж являються розподілами.

Можна показати, якщо $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, g \in C^{\infty}$, а L -деякий розподіл, то $(g \cdot L)$ визначається за формулою $(gL, \varphi) = (L, g\varphi)$ і $(g \cdot L)'$ обчислюється за правилом $(g \cdot L)' = g'L + gL'.$

Розглянемо деякі приклади :

1) Нехай $\eta(x) -$ одинична функція Хевісайда, тоді
$\eta(\varphi) = (L, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx,$ а значить $\eta'(\varphi) = (L', \varphi) = -(L, \varphi') =$
$- \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$ тобто $\eta'(x) = \delta(x).$
Ясно, що $\eta'(x - x_0) = \delta(x - x_0).$

2) Знайдемо $\delta'(x),$ маємо $(\delta', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\varphi(x)dx =$

$$= \delta(x) \cdot \varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi'(x)dx = -(\delta, \varphi') = (\delta, -\varphi') = -\varphi'(0).$$

Далі аналогічно: $\left(\delta^{(n)}, \varphi\right) = (-1)^n\left(\delta, \varphi^{(n)}\right) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$

Інакше, із фільтруючої властивості $\delta(x)$: $x\delta(x) = 0,$ випливає $\delta(x) + x\delta'(x) = 0 =$ $>$ $\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$, далі:

$$2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0 \Longrightarrow \delta''(x) = -\frac{2\delta'(x)}{x} = \frac{2\delta(x)}{x^2}, \ldots$$

$$\ldots, \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!\,\delta(x)}{x^n}.$$

3) Знайдемо похідну від розривної функції: $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$

Маємо: $f(x) = g(x) + (h(x) - g(x))\eta(x - x_0)$. Тоді

$$f'(x) = g'(x) + (h'(x) - g'(x)\eta(x - x_0) + (h(x) - g(x))\delta(x - x_0) =$$
$$= g'(x) + (h'(x) - g'(x))\eta(x - x_0) + (h(x_0) - g(x_0))\delta(x - x_0).$$

Наприклад, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 2 \\ x^3, x > 2 \end{cases}$, то маємо:

$f'(x) = 2x + (3x^2 - 2x)\eta(x - 2) + 4\delta(x - 2).$

4) Розглянемо перетворення аргумента δ-функції. Нехай g(x) – неперервно диференційована функція, така, що $g(x_0) = 0,$ а $g'(x_0) \neq 0$. Тоді її ряд Тейлора: $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}g''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$

Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\varphi(x)dx = \left| \begin{matrix} g(x) = y \\ g'(x)dx = dy \end{matrix} \right| = \int_{g(-\infty)}^{g(+\infty)} \frac{\varphi(x)}{g'(x)} \delta(y)dy =$$

$$= \frac{\varphi(x_0)}{g'(x_0)} \int_{g(-\infty)}^{g(+\infty)} \delta(y)dy = \frac{\varphi(x_0)}{|g'(x_0)|} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta\big(g'(x_0)(x - x_0)\big)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0)}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0)dx,$$

тобто $\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x - x_0)$.

Узагальнюючи для точок $x = x_i, i = \overline{1, n}$, маємо при $g(x_i) = 0$, а $g'(x_i) \neq 0$:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i).$$

Наприклад, для $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x+2)(x-1)(x-2)$, $\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i)$, тобто, обчислюючи $g'(x) = 3x^2 - 2x - 4$, $g'(-2) = 12$, $g'(1) = -3$, $g'(2) = 4$, отримаємо $\delta(g(x)) = \delta(x^3 - x^2 - 4x + 4) =$

$= \frac{1}{12}\delta(x+2) + \frac{1}{3}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2)$.

5) Знайдемо зображення по Лапласу $\delta(t)$ та $\delta'(t)$. Маємо:

$$\delta(t) \doteqdot \int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}|_{t=0} = 1\,, \delta(t - t_0) \doteqdot e^{-t_0 p},$$

$$\delta'(t) \doteqdot \int_0^\infty \delta'(t)e^{-pt}dt = -(e^{-pt})'|_{t=0} = pe^{-pt}|_{t=0} = p,$$

аналогічно $\delta^{(n)}(t) \doteqdot p^n$.

6) Тепер, нехай $f(t)$ – кусково неперервно диференційована функція, що має розриви в точках t_k – скінчені розриви 1-го розряду із стрибками

$h_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0)$, $k = \overline{1,n}$, тоді $f'(t) = f_1'(t) + \sum_{k=1}^{n} h_k\delta(t - t_k)$, де $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} h_k\eta\,(t - t_k)$. Тобто, похідна розривної функції $f'(t)$ складається із її звичайної похідної $f_1'(t)$ (де вона неперервно диференційована) та суми δ –функцій в точці розриву з коефіцієнтами h_k. Розглянемо конкретний приклад.

Нехай $f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$. Тоді

$f'(t) = 0 + \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$. Згадаємо, що $\eta'(t) = \delta(t)$,

$\delta(t - t_0) \doteqdot e^{-t_0 p}$, $\delta(t) \doteqdot 1$. Тоді $f'(t) \doteqdot 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}$.

Тобто $f(t) \doteqdot \frac{1}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} \Longrightarrow f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$.

Якщо не враховувати δ-функцію, то похідна від $f(t)$ як від константи дорівнює 0 скрізь, крім точок $t = 0$, $t = 1$ та $t = 2$, де вона не існує. Але тоді і інтеграл Лапласа для $f'(t)$ дорівнює нулю, звідки і зображення $f(t)$ теж дорівнює нулю, що явно невірно.

7) Застосуємо тепер розклад δ-функції в ряд Фур'є для знаходження суми тригонометричного ряду $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ та числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Маємо: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2}\delta(x)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $S''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$,

$S'''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\delta(x)$.

Тобто маємо рівняння $S'''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\delta(x)$, при $S(0) = S''(0) = 0$.

Розв’яжемо його операційним методом, маємо:

$\delta(x) \doteqdot 1$, $S'''(x) \doteqdot p^3 S(p) - p^2 S(0) - pS'(0) - S''(0)$ або

$p^3 S(p) - pS'(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}$, де $S'(0)$ – поки невідома.

Далі $p^3 S(p) = pS'(0) + \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}$; $S(p) = \frac{1}{2p^4} - \frac{\pi}{2p^3} + \frac{S'(0)}{p^2}$, звідки

$S(p) \doteqdot \frac{1}{2\cdot 3!}x^3 - \frac{\pi}{2\cdot 2!}x^2 + S'(0)x = S(x)$.

При $x = \pi$, маємо, що $\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{4}\pi^2 + S'(0)\pi = 0 \implies S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$, тому

$S(x) = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$. Далі, при $x = \frac{\pi}{2}$, маємо:

$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi^3}{4} + \pi^3\right) = \frac{\pi^3}{32}$.

8) Якщо на $\mathbb{R}^1$ неперервно-дискретно розподілена маса з густиною

$\mu(x) = \rho(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + \sum_{k=3}^{n} m_k \delta(x - x_k)$,

де $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, тоді вся маса

$m = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx + \sum_{k=3}^{n} m_k \int_{x_3-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} \delta(x - x_k)\, dx =$

$= \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx + \sum_{k=3}^{n} m_k$, де $\varepsilon > 0$. Якщо x_c –центр ваги, то

$x_c = \frac{1}{m}\left(\int_{x_1}^{x_2} x\rho(x)dx + \sum_{k=3}^{n} m_k \int_{x_3-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} x\delta(x - x_k)\, dx\right) =$

$= \frac{1}{m}\left(\int_{x_1}^{x_2} x\rho(x)dx + \sum_{k=3}^{n} m_k\, x_k\right).$

Аналогічно, використовуючи поняття δ −функції в $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^3$, можна розв'язати задачу знаходження маси (або заряду) та інших характеристик, якщо густина неперервно- дискретно розподілена на площині або в просторі. **9)** Нехай ξ −неперервно-дискретна випадкова величина із щільністю розподілу $p_\xi(x) = C_1\gamma(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + C_2\sum_{i=3}^{n} p_i\delta(x - x_i)$, де C_1 та C_2 підібрані таким чином, щоб виконувалась умова нормування $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Тоді можна знайти всі характеристики ξ: $F_\xi(x)$, m_ξ, D_ξ,… Наприклад,

$p_\xi(x) = C_1\sqrt{x}(\eta(x) - \eta(x - 1)) + C_2\left(\frac{1}{3}\eta(x - 2) + \frac{1}{4}\eta(x - 3)\right).$

Виберемо $C_2 = 1$, тоді $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = C_1\int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}C_1 + \frac{7}{12} = 1$, звідси $C_1 = \frac{5}{8}$. Знайдемо $m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx = \frac{5}{8}\int_0^1 \sqrt{x^3}\, dx +$

$+\frac{1}{3}\int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} x\delta(x - 2)dx + \frac{1}{4}\int_{3-\varepsilon}^{3+\varepsilon} x\delta(x - 3)dx = \frac{5}{3}$.

4 Відновлення неперервного сигнала по його дискретним значенням. Теорема WKS.

Починаючи з 1928 року в роботах Уіттакера, Найквіста, Котельникова, Хартлі та Шеннона була поставлена та розв'язана задача відновлення аналогового сигналу (зображення) по його дискретним відлікам (цифровим значенням). В 1977 році було запропоновано назвати (по пріоритетам) відповідну теорему відліків теоремою WKS (Whittaker-Kotelnikov-Shannon). В чому суть цієї теореми і яка тут роль $\delta -$ функції Дірака? Розглянемо неперіодичний сигнал $f(t)$ з обмеженим спектром, тобто такий, спектральна функція якого

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$, де $\omega_c -$ максимальна частота спектра.

Тоді $f_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\pi}{\omega_c} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$ − функція відліку.

Її максимальне значення дорівнює одиниці при $t = 0$, а в точках $t_k = \frac{\pi k}{\omega_c}$,

$k = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ дорівнює нулю. При зміщенні $f_0(t)$ вздовж осі t полоса частот не змінюється, причому функції $f_k(t) = f_0\left(t - \frac{\pi k}{\omega_c}\right) = \frac{sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$ на $[-\omega_c, \omega_c]$ – ортогональні між собою при $k \in \mathbb{Z}$. Це означає, що $f(t)$ можна розкласти в ряд по системі $\{f_k(t)\}$, тобто $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$, де при $t = \frac{\pi n}{\omega_c}$, $n \in \mathbb{Z}$, випливає рівність $f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{sin(n-k)\pi}{(n-k)\pi} = a_k$, при $n = k$, тому маємо $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$ – ряд Котельникова.

Нехай період найбільшої частоти спектра ω_c буде $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$, тоді $a_n = f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = f\left(n\frac{T_c}{2}\right)$ – це значення функції $f(t)$ при $t = n\frac{T_c}{2}$, тобто $a_0 = f(0)$, $a_1 = f\left(\frac{T_c}{2}\right)$,…, $a_n = f\left(n\frac{T_c}{2}\right)$,… Звідси маємо, що функція з обмеженим спектром повністю визначається своїми значеннями в дискретні моменти часу, тобто для передачі аналогового неперіодичного сигналу (зображення) з обмеженим спектром достатньо передати лише його окремі значення через $\frac{1}{2}T_c$. Це можна виконати, передаючи короткі імпульси, амплітуди яких пропорційні $a_k = f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right)$. Такими імпульсами якраз і можуть бути відповідні $\delta -$ функції, а саме, замість $f(t)$ можна передати сигнал

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(t - k\frac{T_c}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right),$$

причому для відновлення $f(t)$ треба $\varphi(t)$ пропустити через фільтр нижніх частот з полосою пропускання ω_c, тоді на виході фільтра отримаємо сигнал

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega\frac{k\pi}{\omega_c}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi},$$

який пропорційний $f(t)$. Зауважимо, що вибір k в дійсності обмежений і визначається параметрами $T -$ тривалість сигнала та $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} -$ ширина полоси частот, а саме $N = \frac{2T}{T_c} = 2T \cdot f_c$.

Ясно, що f_c визначається тривалістю найменшої частки сигналу t_{min}. Можна вважати, що $f_c = \frac{1}{t_{min}} = \frac{1}{T_c}$. Звідки випливає, що інтервал відліку складає половину тривалості найбільш короткочасної характерної частини сигналу.

Технічно для такої передачі одновимірного та двовимірного сигналів і зображень використовуються одновимірні та двовимірні дифракційні решітки, діафрагми (як фільтри) та системи лінз відповідних конфігурацій.

На завершення автори висловлюють подяку професору Клесову О.І. за корисні обговорення та професору Василик О.І. за поради та допомогу в оформленні статті.

References:

1. Bilyi, V. O., & Bilyi, O. H. (2021). *Finding finite sums, products, and limits of some numerical sequences. Part 2. Application of higher mathematics methods. Finding series sums* [in Ukrainian]. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 17–35.
2. Dunduchenko, L. O., & Yasinskyi, V. V. (2007). *Higher mathematics. Volume 2* [in Ukrainian]. San Francisco-Kyiv, NTUU "KPI", 648 p.
3. Liashko, I. I., Boiarchuk, O. K., Hai, Ya. H., & Kalaida, O. F. (1985). *Mathematical analysis. Part 2* [in Ukrainian]. Kyiv, "Vyscha Shkola", 552 p.
4. Lytvynenko, O. N. (1974). *Fundamentals of radio optics* [in Ukrainian]. Kyiv, Tekhnika, 206 p. (biblioteka twirpx).
5. Novytska, L., & Levchuk, O. (2018). Tests as an effective tool for monitoring students' knowledge in the process of studying higher mathematics. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: «Pedagogy. Social work».* Coll. of science works, issue 1 (42), 164-167.
6. Sergienko, V. P., & Kuhar, L. O. (2011). Methodological recommendations for writing test tasks. Kyiv: Publishing House of NPU, 41 p.
7. V. V. Drozd (2019). About the best tactical "weapons" of the teacher. *Mathematics in Modern Technical University*, 2019 (1), 25–31.

O.G. Bilyi, V.O. Bilyi, & V.V. Marchuk (2022). Dirac delta function. Main properties and applications. *Mathematics in Modern Technical University*, 2022(1),5-18.

Submitted: 2022-05-04
Accepted: 2022-05-20

Abstract. The article discusses some non-classical definitions of Dirac's delta function, its introduction into quantum mechanics and mathematics as an "exotic" discontinuous function, not strictly defined, but quite suitable for use in considering processes, some of whose characteristics change almost instantaneously. Its convenience lies in the fact that it itself, being "very discontinuous", helps to bring order in the research of precisely discontinuous functions. Some aspects of the strict definition of this function as a singular function - the Dirac distribution are also considered, its properties and application in many branches of mathematics and physics are determined. A comparative analysis of the classical and non-classical approach to the definition of the delta function was carried out. It is noted that the wider set of distribution functions includes the set of all previously considered classical functions and provides an opportunity to deepen the scope of application of mathematical analysis methods in the study of processes occurring in nature. Its importance in the application of Fourier spectral analysis and operational Laplace calculus for the study of discrete and continuous signals is indicated. Examples of the use of the delta function in mechanics, radio engineering, and probability theory are given. The WKS sampling theorem and its application to the discrete transmission of continuous non-periodic signals with a limited spectrum are considered. The technical capabilities of such transmission are specified.

Key words: Dirac's delta function, discontinuous function, linear continuous functional, compact, support, regular and singular distributions, derivative delta – functions, filtering property Dirac's delta functions, Fourier series, spectral function, Laplace integral transform, continuous signal with limited spectrum, WKS sampling theorem, diaphragms, filters, diffraction gratings, discrete signal.