

## Відкрита Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. I тур

А. В. Сиротенко, В. В. Павленков, В. Ю. Богданський

*Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені  
Ігоря Сікорського”, Київ, Україна  
(National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,  
Kyiv, Ukraine)*

### Анотація

В цій статті наведено умови та розв’язки задач категорій А і В першого туру Відкритої Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського 2020/21 н.р. У зв’язку з карантинними обмеженнями Олімпіада проводилася в дистанційному режимі, що, з одного боку, позначилося на кількості учасників, а з іншого – дозволило залучити до участі в Олімпіаді студентів інших навчальних закладів.

**Ключові слова:** Студентська математична олімпіада

**MSC2010** 00A05

**УДК** 510

## 1 Вступ

20 січня 2021 року відбувся I тур Відкритої Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського 2020/21 н.р. У зв’язку з карантинними обмеженнями Олімпіада проводилася в дистанційному режимі, що, з одного боку, позначилося на кількості

---

[antonsyrotenko86@gmail.com](mailto:antonsyrotenko86@gmail.com), [pavlenkovvolodymyr@gmail.com](mailto:pavlenkovvolodymyr@gmail.com), [vbogdanskii@ukr.net](mailto:vbogdanskii@ukr.net)

© 2021 The Author(s). Licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).

Cite as: Syrotenko, A. V., Pavlenkov, V. V., Bogdanskii V. Yu. (2021). Open Mathematical Olympiad of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. Round I. *Mathematics in Modern Technical University, 2021(1)*, 61–73. [10.20535/mmtu-2021.1-061](#)

учасників, а з іншого – дозволило залучити до участі в Олімпіаді студентів інших навчальних закладів.

В I турі олімпіади взяло участь 317 студентів з 19 факультетів та інститутів КПІ ім. Ігоря Сікорського, а також 35 студентів з 4 інших навчальних закладів, в т.ч. КНУ імені Тараса Шевченка, НаУКМА, ВНУ імені Лесі Українки та МНУ імені В.О.Сухомлинського. Загальна кількість учасників I туру – 352 студента. Всі учасники були розділені на три категорії, а також на студентів першого курсу та старшокурсників.

В цій статті наведено умови та розв'язки задач категорій А і В для першого і старших курсів.

## 2 Розв'язки задач категорії А, 1 курс

1. Чи існує послідовність додатних чисел  $(a_n, n \geq 1)$ , для якої границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right)$$

є скінченною?

*Розв'язання.* За нерівністю Коші  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$ .

Отже,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right) \geq \sqrt{n}$ .

Оскільки  $\sqrt{n} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right) = +\infty$  для будь-якої послідовності додатних чисел  $(a_n, n \geq 1)$ .

*Відповідь:* Не існує.

2. Зобразити на комплексній площині  $\mathbb{C}$  множину всіх таких точок  $z$ , що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність  $\operatorname{Re} z^n \geq 0$ .

*Розв'язання.*  $z = 0$ , очевидно, підійде. Нехай  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ , де  $r > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$ . Якщо  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  або  $\varphi < -\frac{\pi}{2}$ , то таке  $z$  не підійде. Якщо  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ , то, очевидно, існує  $n \in \mathbb{N}$ , таке, що  $-\pi \leq n\varphi < -\frac{\pi}{2}$ , тобто  $\operatorname{Re} z^n < 0$ . Аналогічно, якщо  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , то існує  $n \in \mathbb{N}$ , таке, що  $\frac{\pi}{2} < n\varphi \leq \pi$ , тобто  $\operatorname{Re} z^n < 0$ . Якщо  $\varphi = 0$ , то таке  $z$ , очевидно, підійде.

*Відповідь:*  $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$ .

3. Послідовність  $(b_n, n \geq 0)$  задано рекурентним співвідношенням

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n + b_{n+1}}$$

з початковими умовами  $b_0 = 20$ ,  $b_1 = 21$ . Знайти  $b_{2021}$ .

*Розв'язання.* Знайдемо 7 перших членів послідовності:  $b_0 = 20$ ,  $b_1 = 21$ ,  $b_2 = \frac{21}{440}$ ,  $b_3 = \frac{1}{461}$ ,  $b_4 = \frac{20}{441}$ ,  $b_5 = 20$ ,  $b_6 = 21$ . Оскільки кожен член послідовності визначається попередніми двома, то ця послідовність має період 5. Отже,  $b_{2021} = b_1 = 21$ .

*Відповідь:*  $b_{2021} = 21$ .

4. Знайти всі неперервні на  $[0, 1]$  та диференційовні на  $(0, 1)$  функції  $f$  такі, що  $f(0) = 0$  та  $|f'(x)| \leq |f(x)|$  для всіх  $x \in (0, 1)$ .

*Розв'язання.* Функція  $f(x) = 0$ , очевидно, задовольняє умову. Припустимо, що  $f(a) \neq 0$  для деякого  $a \in (0, 1]$ . В силу неперервності  $f$  можна вважати, що  $a < 1$ . Тоді за теоремою Лагранжа  $\exists a_1 \in (0, a)$ , що  $f'(a_1) = \frac{f(a)}{a}$ . Тоді  $|f(a_1)| \geq \frac{|f(a)|}{|a|}$ . Аналогічно,  $\exists a_2 \in (0, a_1)$ , що  $|f(a_2)| \geq \frac{|f(a_1)|}{|a_1|} \geq \frac{|f(a)|}{|a|^2}$ . Оскільки  $\frac{|f(a)|}{|a|^n} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то, продовжуючи, отримаємо, що  $f$  необмежена на  $[0, 1]$ , що неможливо. Протиріччя.

*Відповідь:*  $f(x) = 0$ .

5. У просторі на відстані одна від одної розташовано дві кулі з центрами  $O_1$  та  $O_2$  і радіусами  $R_1$  та  $R_2$ . Де на відрізку  $O_1O_2$  (але зовні куль) потрібно встановити джерело світла, щоб сумарна площа освітлених частин обох сфер набула максимального значення? Відповідь подати у вигляді відношення, в якому точка розташування джерела має ділити відрізок  $O_1O_2$ .

*Розв'язання.* Скористаємось формулою для обчислення площі сферичного сегменту:  $S = 2\pi rh$ , де  $r$  - радіус сфери,  $h$  - висота сегменту. Нехай  $x$  - відстань від джерела світла до  $O_1$ ,  $y$  - відстань від джерела світла до  $O_2$ ;  $x + y = |O_1O_2| = l$ . Тоді висота сегменту освітлення першої сфери дорівнює  $R_1 - \frac{R_1^2}{x}$ ; отже, площа освітленої частини першої сфери дорівнює  $2\pi R_1 \left( R_1 - \frac{R_1^2}{x} \right)$ , а сумарна площа освітлених частин обох сфер дорівнює  $2\pi(R_1^2 + R_2^2) - 2\pi \left( \frac{R_1^3}{x} + \frac{R_2^3}{y} \right)$ . Отже, потрібно знайти мінімум функції  $f(x) = \frac{R_1^3}{x} + \frac{R_2^3}{l-x}$ . Її похідна  $f'(x) = \frac{R_2^3}{(l-x)^2} - \frac{R_1^3}{x^2}$  дорівнює 0 при  $\frac{(l-x)^2}{x^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$ . Отже, шукане відношення  $\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$ .

*Відповідь:*  $\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$ .

6. Для натуральних чисел  $i$  та  $j$  позначимо через  $\sigma_{i,j}$  суму їх спільних дільників:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{i,j:d} d.$$

Наприклад,  $\sigma_{8,12} = 1 + 2 + 4 = 7$ . Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Позначимо  $a_{i,k} = k$ , якщо  $i : k$ , і  $a_{i,k} = 0$ , якщо ні. Позначимо  $b_{k,j} = 1$ , якщо  $j : k$ , і  $b_{k,j} = 0$ , якщо ні. Тоді  $\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ . Позначимо  $A = \|a_{i,k}\|_{i,k=1,\dots,n}$ ,  $B = \|b_{k,j}\|_{k,j=1,\dots,n}$ . Тоді матриця, визначник якої треба знайти, дорівнює  $AB$ , і її визначник  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ . Обидві ці матриці є трикутними;  $a_{k,k} = k$ ,  $b_{k,k} = 1$ ,  $\forall 1 \leq k \leq n$ . Отже,  $\det(A) = n!$ ,  $\det(B) = 1$ ,  $\det(AB) = n!$ .

*Відповідь:*  $n!$

### 3 Розв'язки задач категорії А, старші курси

1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\{4042x\}}{\{2021x\}} dx,$$

де фігурними дужками позначено дробову частину.

*Розв'язання.* Позначимо  $f(x) = \frac{\{4042x\}}{\{2021x\}}$ .

Тоді  $\forall x \in \mathbb{R}$  виконується  $f\left(x + \frac{1}{2021}\right) = f(x)$ .

Отже,  $\int_0^1 f(x) dx = 2021 \int_0^{1/2021} f(x) dx = 2021 \left( \int_0^{1/4042} f(x) dx + \int_{1/4042}^{2/4042} f(x) dx \right)$ .

Якщо  $x \in (0, 1/4042)$ , то  $f(x) = 2$ .

Якщо  $x \in (1/4042, 2/4042)$ , то  $f(x) = \frac{4042x - 1}{2021x} = 2 - \frac{1}{2021x}$ .

Отже,  $\int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_{1/4042}^{2/4042} \frac{dx}{x} = 2 - \ln 2$ .

*Відповідь:*  $2 - \ln 2$ .

2. Знайти всі комплекснозначні диференційовні функції  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , що задовольняють задачу Коші

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) \cdot \bar{z}(t), \\ z(0) = i. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Нехай  $z(t) = u(t) + iv(t)$ . Тоді за умовою  $u'(t) + iv'(t) = u^2 + v^2 \in \mathbb{R}$ , звідки  $v(t) = \text{const}$ .

Оскільки  $v(0) = 1$ , то  $z(t) = u(t) + i$  і  $u'(t) = u^2(t) + 1$ ,  $u(0) = 0$ .

Ця задача Коші має розв'язок  $u(t) = \text{tg}(t)$ .

Отже,  $z(t) = \text{tg}(t) + i$ .

*Відповідь:*  $z(t) = \text{tg}(t) + i$ .

3. Послідовність  $(b_n, n \geq 0)$  задано рекурентним співвідношенням

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n + b_n b_{n+1}}$$

з початковими умовами  $b_0 = 20$ ,  $b_1 = 21$ . Визначити область збіжності та суму степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

*Розв'язання.* Знайдемо 7 перших членів послідовності:  $b_0 = 20, b_1 = 21, b_2 = \frac{21}{440}, b_3 = \frac{1}{461}, b_4 = \frac{20}{441}, b_5 = 20, b_6 = 21$ .

Оскільки кожен член послідовності визначається попередніми двома, то ця послідовність має період 5.

Позначимо  $P(x) = \sum_{n=0}^4 b_n x^n$ . Тоді  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = P(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{5n}$ .

Цей ряд збігається при  $x \in (-1, 1)$ . При  $x \in (-1, 1)$  сума ряду дорівнює

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = P(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{5n} = \frac{P(x)}{1 - x^5} = \frac{20 + 21x + \frac{21}{440}x^2 + \frac{1}{461}x^3 + \frac{20}{441}x^4}{1 - x^5}.$$

*Відповідь:* Область збіжності  $(-1, 1)$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{20 + 21x + \frac{21}{440}x^2 + \frac{1}{461}x^3 + \frac{20}{441}x^4}{1 - x^5}$$

4. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy.$$

*Розв'язання.* Помітимо, що

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 + y^2) dx dy + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 - y^2) dx dy.$$

Очевидно, другий інтеграл по області  $x^2 + y^2 \leq 9$  дорівнює 0, оскільки  $\sin(x^2 - y^2) + \sin(y^2 - x^2) = 0$ .

Знайдемо перший інтеграл. Зробимо полярну заміну координат:  $\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 + y^2) dx dy =$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r \sin(r^2) dr = \pi \int_0^9 \sin(t) dt = \pi(1 - \cos 9).$$

Отже,  $\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 9)$ .

*Відповідь:*  $\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 9)$ .

**5.** У просторі на відстані одна від одної розташовано дві кулі з центрами  $O_1$  та  $O_2$  і радіусами  $R_1$  та  $R_2$ . Де на відрізку  $O_1O_2$  (але зовні куль) потрібно встановити джерело світла, щоб сумарна площа освітлених частин обох сфер набула максимального значення? Відповідь подати у вигляді відношення, в якому точка розташування джерела має ділити відрізок  $O_1O_2$ .

*Розв'язання.* Скористаємось формулою для обчислення площі сферичного сегменту:  $S = 2\pi rh$ , де  $r$  - радіус сфери,  $h$  - висота сегменту.

Нехай  $x$  - відстань від джерела світла до  $O_1$ ,  $y$  - відстань від джерела світла до  $O_2$ ;  $x+y = |O_1O_2| = l$ . Тоді висота сегменту освітлення першої сфери дорівнює  $R_1 - \frac{R_1^2}{x}$ ; отже, площа освітленої частини першої сфери дорівнює  $2\pi R_1 \left( R_1 - \frac{R_1^2}{x} \right)$ , а сумарна площа освітлених частин обох сфер дорівнює  $2\pi(R_1^2 + R_2^2) - 2\pi \left( \frac{R_1^3}{x} + \frac{R_2^3}{y} \right)$ .

Отже, потрібно знайти мінімум функції  $f(x) = \frac{R_1^3}{x} + \frac{R_2^3}{l-x}$ .

Її похідна  $f'(x) = \frac{R_2^3}{(l-x)^2} - \frac{R_1^3}{x^2}$  дорівнює 0 при  $\frac{(l-x)^2}{x^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$ .

Отже, шукане відношення  $\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$ .

*Відповідь:*  $\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$ .

**6.** Для натуральних чисел  $i$  та  $j$  позначимо через  $\sigma_{i,j}$  суму величин, обернених до

їх спільних дільників:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{i,j:d} \frac{1}{d}.$$

Наприклад,  $\sigma_{8,12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ . Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Позначимо  $a_{i,k} = \frac{1}{k}$ , якщо  $i : k$ , і  $a_{i,k} = 0$ , якщо ні. Позначимо  $b_{k,j} = 1$ , якщо  $j : k$ , і  $b_{k,j} = 0$ , якщо ні. Тоді  $\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ .

Позначимо  $A = \|a_{i,k}\|_{i,k=1,\dots,n}$ ,  $B = \|b_{k,j}\|_{k,j=1,\dots,n}$ . Тоді матриця, визначник якої треба знайти, дорівнює  $AB$ , і її визначник  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

Обидві ці матриці є трикутними;  $a_{k,k} = \frac{1}{k}$ ,  $b_{k,k} = 1$ ,  $\forall 1 \leq k \leq n$ .

Отже,  $\det(A) = \frac{1}{n!}$ ,  $\det(B) = 1$ ,  $\det(AB) = \frac{1}{n!}$ .

*Відповідь:*  $\frac{1}{n!}$

## 4 Розв'язки задач категорії В, 1 курс

1. Послідовність  $a_n, n \geq 1$ , задано рекурентно

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}, \quad a_1 = 2, a_2 = 2021.$$

Знайдіть  $a_{2021}$ .

*Розв'язання.* Знайшовши перші 7 елементів послідовності, можемо побачити, що  $a_6 = a_1 = 2$  та  $a_7 = a_2 = 2021$ .

Оскільки кожен наступний член послідовності залежить лише від двох попередніх, можемо зробити висновок, що послідовність періодична з періодом 5 елементів.

Таким чином,  $a_{2021} = a_1 = 2$ .

*Відповідь:*  $a_{2021} = 2$ .

2. Для фіксованого  $n > 1$  розглянемо набір дробових чисел вигляду

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

що містять рівно  $n$  цифр після коми, цифри  $a_i$  можуть приймати значення лише 0 та 1 ( $a_n = 1$ ). Нехай  $x_n$  — кількість чисел в такому наборі, а  $y_n$  — сума усіх чисел набору. Знайдіть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

*Розв'язання.* Позначимо через  $M_n$  даний в умові набір чисел. Кількість елементів множини  $M_n$  рівна кількості всеможливих наборів чисел 0 та 1 довжини  $n - 1$ , отже  $x_n = 2^{n-1}$ . Кожне число множини  $M_n$  можна подати у вигляді:

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \frac{1}{10^k} \right) + \frac{1}{10^n},$$

при цьому для  $k = \overline{1, n-1}$  рівно половина серед всіх  $2^{n-1}$  чисел множини  $M_n$  мають цифру  $a_k = 1$ , а інша половина — 0. Тому

$$y_n = 2^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k} + \frac{2^{n-1}}{10^n} = \frac{2^{n-1}}{18} \left( 1 - \frac{1}{10^{n-1}} \right) + \frac{2^{n-1}}{10^n}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{18} \left( 1 - \frac{1}{10^{n-1}} \right) + \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{18}.$$

*Відповідь:*  $\frac{1}{18}$ .

**3.** Усі стовпці та рядки матриці  $A$  — арифметичні прогресії. Знайти елемент  $a_{14}$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} * & 9 & * & * \\ * & * & 8 & * \\ * & * & * & 5 \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Зірочкою позначені невідомі елементи матриці  $A$ .

*Розв'язання.* З умови задачі слідує, що

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 3b & 1 + a + 3c & 1 + 2a + 6c - 3c & 1 + 3a + 9c - 6b \\ 1 + 2b & 1 + a + 2c & 1 + 2a + 4c - 2b & 1 + 3a + 6c - 4b \\ 1 + b & 1 + a + c & 1 + 2a + 2c - b & 1 + 3a + 3c - 2b \\ 1 & 1 + a & 1 + 2a & 1 + 3a \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих чисел  $a, b, c$

$$\begin{cases} a + 3c = 8, \\ 2a - 2b + 4c = 7, \\ 3a - 2b + 3c = 4. \end{cases}$$

Розв'язок системи  $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4})$ . Тому  $a_{14} = 1 + 3a + 9c - 6b = 14, 5$ .

*Відповідь:* 14, 5.

4. Нехай  $F_1$  та  $F_2$  — фокуси еліпса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , а  $P$  — така точка еліпса, що  $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$ . Знайти площу трикутника  $PF_1F_2$ .

*Розв'язання.* За фокальною властивістю еліпса  $PF_1 + PF_2 = 2a = 6$ . Звідси та з рівності  $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$  випливає, що  $PF_1 = 4$ ,  $PF_2 = 2$ . Також відмітимо, що  $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ . Помітимо, що  $PF_1^2 + PF_2^2 = F_1F_2^2$ , а тому трикутник  $PF_1F_2$  — прямокутний. Отже  $S = \frac{1}{2}PF_1 \cdot PF_2 = 4$ .

*Відповідь:* 4.

5. Нехай  $f(x) = x^{100} + 1$ ,  $g(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \dots + 100x + 101$ . Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x) \cdot g^{(100)}(x) - f'(x) \cdot g^{(99)}(x) + f''(x) \cdot g^{(98)}(x) - f'''(x) \cdot g^{(97)}(x) + \dots + f^{(100)}(x) \cdot g(x),$$

де  $f^{(n)}$  — похідна порядку  $n$ . Знайти  $h(2020^{2021})$ .

*Розв'язання.* Знайдемо похідну функції  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g^{(100)}(x) + f(x) \cdot g^{(100)}(x) - f''(x) \cdot g^{(99)}(x) - f'(x) \cdot g^{(100)}(x) + \\ &\quad + f'''(x) \cdot g^{(98)}(x) + f''(x) \cdot g^{(99)}(x) - \dots + \\ &\quad + f^{(101)}(x) \cdot g(x) + f^{(100)}(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g^{(101)}(x) + f^{(101)}(x) \cdot g(x) = 0. \end{aligned}$$

Звідси,  $h(x) = \text{const}$  і

$$h(2020^{2021}) = h(0) = f(0) \cdot g^{(100)}(0) + f^{(100)}(0) \cdot g(0) = 100! + 100! \cdot 101 = 102 \cdot 100!$$

*Відповідь:*  $h(2020^{2021}) = 102 \cdot 100!$

6. Знайти значення виразу

$$\frac{1^2}{1! \cdot 2020!} + \frac{2^2}{2! \cdot 2019!} + \frac{3^2}{3! \cdot 2018!} + \dots + \frac{2021^2}{2021! \cdot 0!}.$$

*Розв'язання.* Перепишемо вираз у вигляді:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2021!} \left( 0^2 \frac{2021!}{0! \cdot 2020!} + 1^2 \frac{2021!}{1! \cdot 2020!} + 2^2 \frac{2021!}{2! \cdot 2019!} + \dots + 2021^2 \frac{2021!}{2021! \cdot 0!} \right) = \\ &= \frac{1}{2021!} \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2. \end{aligned}$$

Для знаходження отриманої суми можна розглянути випадкову величину Бернуллі  $\xi$  з параметрами  $p = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2021$ . Її числові характеристики  $\mathbb{E}\xi = np = \frac{2021}{2}$ ,  $\mathbb{D}\xi = npq = \frac{2021}{4}$ . Тому

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{2021}{4} + \left(\frac{2021}{2}\right)^2 = \frac{2021 + 2021^2}{4} = \frac{2043231}{2}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{2^{2021}} \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2 = \frac{2043231}{2}.$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2 = 2^{2020} \cdot 2043231$$

та  $M = \frac{2^{2020} \cdot 2043231}{2021!}$ .

*Відповідь:*  $\frac{2^{2020} \cdot 2043231}{2021!}$ .

## 5 Розв'язки задач категорії В, старші курси

1. Знайти неперервну функцію  $f$ , яка задовольняє рівність

$$f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(xt) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Розв'язання.* Зробимо заміну  $xt = z$  в інтегралі. Рівняння набуде вигляду:

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \int_0^x f(z) dz, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що  $f(x) = F'(x)$ ,  $\int_0^x f(z) dz = F(x)$ .

Отже, для функції  $F$  справедливе наступне лінійне диференціальне рівняння

$$F' - \frac{2}{x}F = x^2.$$

Його розв'язок  $F(x) = x^3 + Cx^2$ , звідки  $f(x) = 3x^2 + ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Підстановкою можна впевнитися, що підходять всі значення сталої  $a \in \mathbb{R}$ .

*Відповідь:*  $f(x) = 3x^2 + ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Для фіксованого  $n > 1$  розглянемо набір дробових чисел вигляду

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

що містять рівно  $n$  цифр після коми, цифри  $a_i$  можуть приймати значення лише 0 та 1 ( $a_n = 1$ ). Нехай  $x_n$  — кількість чисел в такому наборі, а  $y_n$  — сума усіх чисел набору. Знайдіть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

*Розв'язання.* Позначимо через  $M_n$  даний в умові набір чисел. Кількість елементів множини  $M_n$  рівна кількості всеможливих наборів чисел 0 та 1 довжини  $n - 1$ , отже  $x_n = 2^{n-1}$ . Кожне число множини  $M_n$  можна подати у вигляді:

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \frac{1}{10^k} \right) + \frac{1}{10^n},$$

при цьому для  $k = \overline{1, n-1}$  рівно половина серед всіх  $2^{n-1}$  чисел множини  $M_n$  мають цифру  $a_k = 1$ , а інша половина — 0. Тому

$$y_n = 2^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{10^k} + \frac{2^{n-1}}{10^n} = \frac{2^{n-1}}{18} \left( 1 - \frac{1}{10^{n-1}} \right) + \frac{2^{n-1}}{10^n}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{18} \left( 1 - \frac{1}{10^{n-1}} \right) + \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{18}.$$

*Відповідь:*  $\frac{1}{18}$ .

### 3. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \arccos^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

*Розв'язання.* Відмітимо, що

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2(1-x)}} = 1.$$

Тому  $\arccos^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) \sim \frac{1}{n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Далі очевидно, що областю збіжності степеневого ряду є інтервал  $[0, 2)$ .

*Відповідь:*  $[0, 2)$ .

### 4. Обчислити

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy.$$

*Розв'язання.* Помітимо, що

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 + y^2) dx dy + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 - y^2) dx dy$$

Очевидно, другий інтеграл по області  $x^2 + y^2 \leq 9$  дорівнює 0, оскільки  $\sin(x^2 - y^2) + \sin(y^2 - x^2) = 0$ .

Знайдемо перший інтеграл. Зробимо полярну заміну координат:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r \sin(r^2) dr = \pi \int_0^9 \sin(t) dt = \pi(1 - \cos 9).$$

Отже,  $\iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 9)$ .

*Відповідь:*  $\frac{\pi}{2}(1 - \cos 9)$ .

**5.** Нехай  $f(x) = x^{100} + 1$ ,  $g(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \dots + 100x + 101$ . Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x) \cdot g^{(100)}(x) - f'(x) \cdot g^{(99)}(x) + f''(x) \cdot g^{(98)}(x) - f'''(x) \cdot g^{(97)}(x) + \dots + f^{(100)}(x) \cdot g(x),$$

де  $f^{(n)}$  — похідна порядку  $n$ . Знайти  $h(2020^{2021})$ .

*Розв'язання.* Знайдемо похідну функції  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g^{(100)}(x) + f(x) \cdot g^{(100)}(x) - f''(x) \cdot g^{(99)}(x) - f'(x) \cdot g^{(100)}(x) + \\ &\quad + f'''(x) \cdot g^{(98)}(x) + f''(x) \cdot g^{(99)}(x) - \dots + \\ &\quad + f^{(101)}(x) \cdot g(x) + f^{(100)}(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g^{(101)}(x) + f^{(101)}(x) \cdot g(x) = 0. \end{aligned}$$

Звідси,  $h(x) = \text{const}$  і

$$h(2020^{2021}) = h(0) = f(0) \cdot g^{(100)}(0) + f^{(100)}(0) \cdot g(0) = 100! + 100! \cdot 101 = 102 \cdot 100!$$

*Відповідь:*  $h(2020^{2021}) = 102 \cdot 100!$

**6.** Знайти значення виразу

$$\frac{1^2}{1! \cdot 2020!} + \frac{2^2}{2! \cdot 2019!} + \frac{3^2}{3! \cdot 2018!} + \dots + \frac{2021^2}{2021! \cdot 0!}.$$

*Розв'язання.* Перепишемо вираз у вигляді:

$$M = \frac{1}{2021!} \left( 0^2 \frac{2021!}{0! \cdot 2020!} + 1^2 \frac{2021!}{1! \cdot 2020!} + 2^2 \frac{2021!}{2! \cdot 2019!} + \dots + 2021^2 \frac{2021!}{2021! \cdot 0!} \right) =$$

$$= \frac{1}{2021!} \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2.$$

Для знаходження отриманої суми можна розглянути випадкову величину Бернуллі  $\xi$  з параметрами  $p = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2021$ . Її числові характеристики  $\mathbb{E}\xi = np = \frac{2021}{2}$ ,  $\mathbb{D}\xi = npq = \frac{2021}{4}$ . Тому

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{2021}{4} + \left(\frac{2021}{2}\right)^2 = \frac{2021 + 2021^2}{4} = \frac{2043231}{2}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{2^{2021}} \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2 = \frac{2043231}{2}.$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k k^2 = 2^{2020} \cdot 2043231$$

та  $M = \frac{2^{2020} \cdot 2043231}{2021!}$ .

*Відповідь:*  $\frac{2^{2020} \cdot 2043231}{2021!}$ .

А. В. Сиротенко, В. В. Павленков, В. Ю. Богданський (2021). Відкрита Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. I тур. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 61–73.

*Submitted: 2021-09-29*

*Accepted: 2021-10-15*

A. V. Syrotenko, V. V. Pavlenkov, V. Yu. Bogdanskii (2021). Open Mathematical Olympiad of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. Round I. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 61–73.

**Abstract.** This article provides the conditions and solutions to the problems of categories A and B of the first round of the Open Mathematical Olympiad conducted at Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute in 2020/2021 academic year. Due to the quarantine restrictions, the Olympiad was held remotely, which, on the one hand, affected the number of participants, and on the other, allowed students from other educational institutions to participate in the Olympiad.

**Keywords:** Student Mathematical Olympiad