

## Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Частина 2. Застосування методів вищої математики. Відшукування сум рядів

В. О. Білий<sup>1</sup>, О. Г. Білий<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
(Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, Ukraine)*

<sup>2</sup>*Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені  
Ігоря Сікорського”, Київ, Україна  
(National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,  
Kyiv, Ukraine)*

### Анотація

В порівнянні з методами елементарної математики методи вищої математики значно розширюють спектр можливостей при знаходженні сум та добутків елементів деяких числових послідовностей та сум числових або функціональних рядів. В даній статті розглянуто застосування формул Муавра, Єйлера, бінома Ньютона, наведені приклади. Розглядаючи підходящу функцію на відрізку  $[a, b]$  і формуючи для неї відповідну інтегральну суму Рімана, інтегруванням знаходимо її значення. Використовуючи розклади Тейлора-Маклорена деяких відомих функцій в  $R$  або  $C$ , інтегруванням та диференціюванням відповідних степеневих та функціональних рядів, отримуємо шукані суми. Наведено приклад застосування формули Валіса. Розкладаючи деякі функції в ряд Фур'є знаходимо при певних значеннях аргумента

суми цілої низки цікавих числових рядів. Приведено приклад застосування рівності Ляпунова для обчислення суми тригонометричних рядів. Розглянуто застосування методів операційного числення для знаходження сум числових, функціональних та тригонометричних рядів, наведено приклад використання  $\delta$ -функції Дірака та її властивостей.

**Ключові слова:** сума, добуток, методи, функції комплексної змінної, ряди, ряди Фур'є, диференціювання, інтегрування, операційне числення,  $\delta$ -функція Дірака.

MSC2010 40-01

УДК 517.52

## 1 Вступ

В **Частині 1.** статті розглянуто певні методи елементарної математики для знаходження сум та добутків елементів числових та функціональних послідовностей.

Методи вищої математики значно розширюють спектр можливостей при розв'язанні такого роду задач. Далі ми означимо відповідні методи, пояснимо їх суть і, на конкретних прикладах, покажемо застосування цих методів з аналізом отриманих результатів.

## 2 Застосування формули Муавра, формули Ейлера та бінома Ньютона

Метод полягає в застосуванні відомих формул

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi = e^{in\varphi},$$

а також формули суми геометричної прогресії та бінома Ньютона.

**Приклад 1.** Знайти

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos k\varphi, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Розв'язання. Маємо

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \cos n\varphi.$$

Позначимо

$$Q_n = \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \sin n\varphi.$$

Тоді

$$S_n + iQ_n = 1 + \frac{1}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{4} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + \frac{1}{2^n} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2 \left(1 - \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}{2 - z} = \\
&= \frac{(2^{n+1} - z^{n+1}) \left(2 - \frac{1}{z}\right)}{2^n (2 - z) \left(2 - \frac{1}{z}\right)} = \\
&= \frac{2^{n+2} - 2^{n+1} (\cos \varphi - i \sin \varphi) - 2 (\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) + \cos n\varphi + i \sin n\varphi}{2^n (4 - 4\cos \varphi + 1)},
\end{aligned}$$

де  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ;  $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ , тоді

$$\begin{aligned}
S_n = \operatorname{Re}(S_n + iQ_n) &= \frac{2^{n+2} + \cos n\varphi - 2 \cos(n+1)\varphi - 2^{n+1} \cos \varphi}{2^n (5 - 4\cos \varphi)} = \\
&= \frac{1}{5 - 4\cos \varphi} \left( 4 - 2\cos \varphi - \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n+1)\varphi + \frac{1}{2^n} \cos n\varphi \right),
\end{aligned}$$

далі

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2(2 - \cos \varphi)}{5 - 4\cos \varphi}.$$

Аналогічно знаходимо  $Q_n = \operatorname{Im}(S_n + iQ_n)$ .

**Приклад 2.** Знайти

$$S_n = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \dots$$

Розв'язання. Розглянемо  $1 + i\frac{1}{\sqrt{3}} = z = \begin{vmatrix} x = 1 & \rho = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} & \varphi = \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} =$   
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ , тоді  $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n$ . По формулі бінома:

$$\begin{aligned}
\left(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n &= 1^n + C_n^1 \frac{i}{\sqrt{3}} + C_n^2 \frac{i^2}{3} + C_n^3 \frac{i^3}{3\sqrt{3}} + C_n^4 \frac{i^4}{9} + C_n^5 \frac{i^5}{9\sqrt{3}} + \dots = \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} C_n^1 i - \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{3} C_n^3 \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} C_n^4 + \frac{1}{9} C_n^5 \frac{i}{\sqrt{3}} - \dots \equiv \\
&\equiv \frac{2^n}{\sqrt{3}^n} \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right) \Rightarrow \\
\frac{1}{\sqrt{3}} \left( C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} S_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}^n} \sin \frac{n\pi}{6},
\end{aligned}$$

або

$$S_n = \frac{2^n \sin \frac{n\pi}{6}}{3^{\frac{n-1}{2}}}.$$

**Приклад 3.** Обчислити

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = Q(q, x), \quad \text{при } |q| < 1.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{ix})^n = \frac{qe^{ix}}{1 - qe^{ix}} = T,$$

бо за умовою  $|qe^{ix}| = |q| |e^{ix}| = |q| \cdot 1 < 1$ , далі:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx + i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = S(q, x) + iQ(q, x) = \\ &= \frac{q(\cos x + i \sin x)}{(1 - q \cos x) - iq \sin x} = \frac{q(\cos x + i \sin x)(1 - q \cos x + iq \sin x)}{(1 - q \cos x)^2 + (q \sin x)^2} = \\ &= \frac{q \cos x - q^2 + iq \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x} = \frac{q \cos x - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos x} + i \frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = Q(q, x) = \frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}.$$

### 3 Застосування визначеного інтеграла, зведення до обчислення границь відповідних інтегральних сум

**Приклад 1.** В Частині 1. ми розглядали послідовність

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

та отримали

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

Покажемо цей результат інакше. Розглянемо функцію  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1; 2]$ . Розіб'ємо  $[1; 2]$  на  $n$  рівних частин  $\{x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}, x_2 = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}, \dots, x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2\}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ .

Тоді

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2.$$

**Приклад 2.**

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Розв'язання. Розглядаючи функцію  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  і точки поділу  $[0; 1] \quad \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}$ , маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

## 4 Використання функціональних та степеневих рядів, інтегрування та диференціювання їх, формули розкладу Тейлора-Маклорена. Ряди в комплексній площині. Формула Валіса

**Приклад 1.** Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n = S(x).$$

Розв'язання. Ряд збігається рівномірно і абсолютно на  $\mathbb{R}$ . Використаємо розклад  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} + e^{\frac{x}{2}} = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

**Приклад 2.**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n},$$

використаємо розклад

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання.  $S(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cos x =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 3.** Диференціюючи ряд знайти його суму:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

Розв'язання. Ясно, що при  $x \in [-1 + \omega, 1 - \omega]$ ,  $\omega > 0$  можна цей ряд двічі диференціювати, маємо:  $|x| < 1$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n x^{2n-1}}{n(2n-1)}; \quad S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}}{2n-1} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2 \left(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots\right) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Тоді

$$S'(x) = \int_0^x \frac{2dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = 2 \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1, \quad \text{далі}$$

$$S(x) = 2 \int_0^x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{arctg} x = u & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv & v = x \end{array} \right| =$$

$$= 2x \operatorname{arctg} x \Big|_0^x - 2 \int_0^x \frac{x dx}{1+x^2} = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2),$$

$|x| < 1$ , при  $x = \pm 1$  ряд теж збіжний (застосовуючи граничний перехід).

**Приклад 4.** Розглянемо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$$

знайдемо їх суми. Для цього знайдемо суму ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = S(x)$ .

Ясно, що це

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} &= e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x} = \\ &= e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i e^{\cos x} (\sin(\sin x))) = \operatorname{Re} S(x) + i \operatorname{Im} S(x). \end{aligned}$$

Але

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$$

тому ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} (\cos(\sin x)) ; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} (\sin(\sin x)) .$$

**Приклад 5.** Розглянемо в  $\mathbb{C}$  розклад

$$\ln(1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{при } |z| < 1.$$

Підставимо  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , маємо:  $|\rho| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \ln(1 - \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)) &= \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\varphi}{n} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\varphi}{n}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2) - i \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi} = -\mathcal{P} - i\mathcal{Q} .$$

Тобто

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\varphi}{n} &= -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\varphi}{n} &= \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi} . \end{aligned}$$

Якщо  $0 < \varphi \leq \pi$ , то при  $\rho = 1$  обидва ряди збіжні, а значить за теоремою Абеля можна перейти до границі при  $\rho \rightarrow 1 - 0$  (справа), тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

**Приклад 6.** Довести, що

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = y_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Запишемо формулу Валіса, яка впливає із розкладу

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad \text{при } x = \frac{\pi}{2},$$

а саме

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \dots \end{aligned}$$

Тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \text{де } P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sqrt{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} = x_n \sqrt{2n+1}.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Тобто, дійсно  $x_n \sim y_n$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

## 5 Застосування розвинення в ряд Фур'є

Розглянемо  $2l$  періодичну функцію  $f(x)$ , що на  $x \in [-l; l]$  задовольняє всім умовам теореми Діріхле. Тоді  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^*(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Використовуючи цей розклад при певних значеннях невідомого  $x$ , отримуємо суми деяких числових рядів.

**Приклад 1.** Функцію  $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  на  $x \in (-\pi; \pi)$ , розкласти в ряд Фур'є. Знайти суму ряду Лейбніца

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Розв'язання.  $f(x)$  – непарна. Ряд Фур'є має вигляд

$$f^*(x) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

тоді  $x = \frac{\pi}{2}$  точка неперервності  $f(x)$ , тому, маємо

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$$

**Приклад 2.** Функцію  $f(x) = x^2$  на  $x \in (-\pi; \pi)$  розкласти в ряд Фур'є. Знайти суми

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Розв'язання.  $f(x)$  – парна, її ряд Фур'є:

$$f^*(x) \cong \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

1)  $x = \pi$  – точка неперервності, тому маємо рівність

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

2)  $x = 0$  – точка неперервності, тоді

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4S_2, \quad \text{звідки } S_2 = \frac{\pi^2}{12}.$$

3) Із рівності

$$S_1 + S_2 = 2S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Приклад 3.** Розкласти  $f(x) = x(\pi - x)$  в ряд синусів на  $x \in (0; \pi)$ . Знайти суму

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Розв'язання. Розклад має вид:

$$f^*(x) \cong \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}; x \in \mathbb{R}.$$

При  $x = \frac{\pi}{2}$ , маємо

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3} = \frac{8}{\pi} S,$$

звідки

$$S = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Приклад 4.** Виходячи з рівності Ляпунова, знайти

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{та} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}, \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

Розв'язання. Для всякої інтегрованої на  $[-l; l]$  разом із своїм квадратом функції  $f(x)$  формально побудований тригонометричний ряд Фур'є задовольняє умові повноти (рівність Ляпунова).

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

Розглянемо функцію (парна,  $b_n = 0$ )  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < \alpha \\ 0, & \text{при } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$ .

Застосуємо до неї рівність Ляпунова. Маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha 1 \cdot dx = \frac{2\alpha}{\pi}; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n} \sin n\alpha.$$

Тоді

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{4\alpha^2}{2\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin^2 n\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha 1 \cdot dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Тобто

$$\frac{4}{\pi^2} S_1 = \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2}, \quad \text{або} \quad S_1 = \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2}.$$

Але

$$S_1 + S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

тому

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} - S_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + \alpha^2}{6}.$$

## 6 Методи операційного числення. Застосування інтегрального перетворення Лапласа

Нехай  $f(t)$  – функція-оригінал, а  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$  – її зображення по Лапласу, маємо:  $f(t) \doteq F(p)$ .

Нехай  $S = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p = n$ .

Тоді

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{\infty} f(t) e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt = \\ &= (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t) e^{-mt}}{1 \mp e^{-t}} dt, \end{aligned} \quad (1)$$

$S$  – сума нашого збіжного ряду.

**Приклад 1.** Знайти

$$S = \sum_{n=m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

Розв’язання. Знайдемо

$$f(t) \doteq F(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+2} + \frac{D}{2n+3}.$$

Методом зручних значень:  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ ,  $D = -\frac{1}{3}$ .

Тоді

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{\frac{1}{6}}{n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{\frac{1}{3}}{2n+3} \doteq \\ &\doteq \frac{1}{6} \eta(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-\frac{3t}{2}}. \end{aligned}$$

За формулою (1), маємо:

$$S = \int_0^{\infty} \frac{1 - 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{-t} - e^{-\frac{3t}{2}}}{6(1 + e^{-t})} e^{-t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ e^{-\frac{t}{2}} = x \\ dt = -\frac{2dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{1}{3} \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{18} (3\pi - 6\ln 2 - 5) = S.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти

$$S = \sum_{n=m=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n^2 + n + 3}.$$

Розв'язання. **1 метод (операційний).** Використаємо формулу:

$$\operatorname{arctg} \frac{k(b-a)}{n^2 + (a+b)n + ab + k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k}{n+a} - \operatorname{arctg} \frac{k}{n+b},$$

що в нашому випадку буде:  $k = \sqrt{3}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ , тобто

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n^2 + n + 3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1}.$$

За таблицею зображень та використовуючи властивості інтегрального перетворення Лапласа, маємо:

$$\sin mt \doteq \frac{m}{m^2 + p^2},$$

далі

$$\frac{\sin mt}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{mdp}{m^2 + p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{m} = \operatorname{arctg} \frac{m}{p},$$

і

$$e^{-at} \frac{\sin mt}{t} \doteq \operatorname{arctg} \frac{m}{p+a},$$

звідки маємо ( $p = n$ ):

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \doteq \frac{\sin \sqrt{3} t}{t} - \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3} t}{t} = f(t).$$

Тепер за формулою (1), маємо:

$$S = \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{3} t (1 - e^{-t}) e^{-t}}{t(1 - e^{-t})} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3}t}{t} dt = \left| \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin mx}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} \right| = \\
&= \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = S.
\end{aligned}$$

**2 метод (телескопічний).**

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \left| a_k = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{k} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{k+1} \right| = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \dots + \\
&+ \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \right) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Далі розглянемо методи операційного числення для знаходження суми деяких тригонометричних рядів. Нехай знову 1)  $f(t) \doteq F(p)$ , 2)  $\Phi(t, x)$  – твірна нескінченної функціональної послідовності  $\{\varphi_n(x)\}$ , тобто

$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n$ , 3) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \varphi_n(x) = S(x)$  – збігається на  $x \in (a; b)$ , тоді

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^\infty f(t) e^{-nt} dt = \int_0^\infty f(t) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \varphi_n(x) dt = \\
&= \int_0^\infty f(t) \Phi(e^{-t}, x) dt = S(x),
\end{aligned} \tag{2}$$

причому:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а) якщо } \varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1} \sin(nk + m)x, \text{ то} \\ \Phi_{(k, m)}(t, x)|_{\sin} = \frac{t \sin(k+m)x \mp t^2 \sin mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \sin(nk + m)x \cdot t^n; \\ \text{б) якщо } \varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1} \cos(nk + m)x, \text{ то} \\ \Phi_{(k, m)}(t, x)|_{\cos} = \frac{t \cos(k+m)x \mp t^2 \cos mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \cos(nk + m)x \cdot t^n. \end{array} \right. \tag{3}$$

**Приклад 3.** Знайти

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. **1 метод (операційний).** Маємо

$$F(n) = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$F(n) \doteq \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \operatorname{sht} = f(t).$$

Далі  $\Phi(t, x) = \Phi_{(1, 0)}(t, x) - t \sin x$ , бо  $k = 1, m = 0, n = 2, 3, \dots$  (тому треба відняти  $t \sin x$  при  $n = 1$ , при  $n = 0, \sin(0x) = 0$ ). Тобто, за (3):

$$\Phi(t, x) = \frac{t \sin x - 0}{1 - 2t \cos x + t^2} - t \sin x = \frac{2t^2 \sin x \cos x - t^3 \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

Тепер, за формулою (2), обчислимо

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^? \operatorname{sht} \frac{2e^{-2t} \sin x \cos x - e^{-3t} \sin x}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} dt = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ e^{-t} = y \\ dt = -\frac{dy}{y} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 - y^2)(\sin 2x - y \sin x)}{y^2 - 2y \cos x + 1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( y \sin x - \frac{2 \sin x (y - \cos x)}{y^2 - 2y \cos x + 1} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \sin x \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \sin x \int_0^1 \frac{(2y - 2 \cos x) dy}{y^2 - 2y \cos x + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \ln(y^2 - 2y \cos x + 1) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \ln(2(1 - \cos x)) = \sin x \left( \frac{1}{4} - \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right). \end{aligned}$$

## 2 метод (за допомогою рядів аналітичних функцій комплексної змінної).

Розглянемо ряди виду (A):  $\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$ , (B):  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ , де  $q_n > 0$ ,  $q_n \rightarrow 0$ ,  $q_n \downarrow$  монотонно. Тоді на довільному замкнутому проміжку, що не містить точок  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , обидва ряди збігаються рівномірно. Позначимо суму ряду (A) через  $f(x)$ , а ряду (B) через  $g(x)$ . Так як  $f(x)$  — парна, а  $g(x)$  — непарна, то можна розглядати лише  $x \in [0, \pi]$  (обидві функції періодичні з  $T_0 = 2\pi$ ). Таким чином, можна пов'язати функції  $f(x)$  і  $g(x)$  з їх розкладом у ряд Фур'є. Дійсно, якщо  $f(x)$  та  $g(x)$  — абсолютно інтегровні, то ряди (A) і (B) являють собою розвинення цих функцій в ряд Фур'є. Одна із достатніх умов: якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n}$  — збіжний, то ряди (A) та (B) — ряди Фур'є функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ . Природньо виникає питання, а як знаючи ряди (A) і (B) знайти їх суми  $f(x)$  та  $g(x)$ , тобто виразити їх через елементарні функції, якщо це можливо. Ейлер запропонував застосувати аналітичні функції комплексної змінної таким чином. Нехай при деякому наборі  $\{q_n\}$  ряди (A) та (B) збігаються до  $f(x)$  та, відповідно,  $g(x)$  в проміжку  $[0, 2\pi]$ , за виключенням лише, можливо, окремих точок. Розглянемо тепер в  $\mathbb{C}$  степеневий ряд  $\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ . На  $|z| = 1$ , тобто при  $z = e^{ix}$ , цей ряд збігається, за виключенням окремих точок. Тому

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\cos nx + i \sin nx) = f(x) + i g(x).$$

Ясно, що при  $|z| < 1$  таким чином визначена певна функція  $\varphi(z)$ . Використовуючи відомі розклади елементарних функцій комплексної змінної в степеневий ряд, часто вдається звести до них і функцію  $\varphi(z)$ , тоді, якщо  $z = re^{ix}$  ( $r < 1$ ), маємо

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n r^n e^{inx} = \varphi(re^{ix}).$$

За теоремою Абеля, як тільки ряд з  $r = 1$  збігається, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) = f(x) + ig(x),$$

тобто суми рядів  $(A)$  та  $(B)$  знайдені одночасно як дійсна та уявна частини. Повернімося тепер до нашого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} = S(x) = g(x).$$

Тут

$$q_n = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Знайдемо функцію  $\varphi(z)$ , маємо:  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{1} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} + \dots + \frac{z^n}{n-1} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{5} + \dots + \frac{z^n}{n+1} + \dots \right) = \\ &= \left| \ln(1-z) = - \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right), |z| < 1 \right| = \\ &\quad \text{(відомий розклад)} \\ &= \frac{z}{2} \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2z} \left( \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right) - z - \frac{z^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{z}{2} \ln(1-z) + \frac{1}{2z} \left( \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2} \right) \ln(1-z). \end{aligned}$$

Тепер

$$\varphi(re^{ix}) = \frac{1}{2} + \frac{re^{ix}}{4} - r \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) \ln(1 - re^{ix}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} 1 - re^{ix} = 1 - r(\cos x + i \sin x) = (1 - r \cos x) - ir \sin x \\ \ln z = \ln |z| + i\varphi = \ln |z| + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = x + iy \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{r}{4} (\cos x + i \sin x) - r i \sin x \cdot \ln(1 - r \cos x - ir \sin x). \\
f(x) + ig(x) &= \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) = \varphi(e^{ix}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) - \\
&- i \sin x \cdot \ln \left( 2 \sin^2 \frac{x}{2} - i 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) - \\
&- i \sin x \left( \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| - i \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x + \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin x + \\
&+ i \left( \frac{1}{4} \sin x - \sin x \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right) = f(x) + ig(x), \quad x \in (0; 2\pi).
\end{aligned}$$

Тобто маємо:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x + \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin x, \\
S(x) = g(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} = \sin x \left( \frac{1}{4} - \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right).
\end{aligned}$$

**Приклад 4.** Знайти

$$S(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Розв'язання. Відповідний степеневий ряд в  $\mathbb{C}$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

але це є розкладом  $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$ ,  $|z| \leq 1$ , крім  $z = \pm i$ .

Покладемо  $z = e^{ix}$ ,  $x \in [0; \pi]$ , але  $x \neq \frac{\pi}{2}$ , тоді

$$\begin{aligned}
\frac{1+iz}{1-iz} &= \left| z = e^{ix} \right| = \frac{1+i(\cos x + i \sin x)}{1-i(\cos x + i \sin x)} = \\
&= \frac{2i \cos x}{2(1 + \sin x)} = i \frac{\cos x}{1 + \sin x} = itg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right). \\
\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| &= \left| tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|,
\end{aligned}$$

$$\arg \frac{1+iz}{1-iz} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \ln \frac{1+iz}{1-iz} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \pm i \frac{\pi}{2}.$$

Тобто

$$\operatorname{arctg} (e^{ix}) = \pm \frac{\pi}{4} + i \frac{1}{4} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right),$$

або

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}; & x \in [0; \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\pi}{4}; & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{1}{4} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right), \quad x \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

## 7 Застосування інтегральної форми $\delta$ -функції Дірака та її розкладу в ряд Фур'є

**Приклад.** Знайти

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad \text{а також} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Розв'язання. Якщо  $\delta(x)$  задана на  $x \in (0; \pi)$ , то справедливі формули:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2} \delta(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} (\delta(x) - \delta(2x));$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx = \frac{\pi}{2} (2\delta(2x) - \delta(x)); \quad \delta(x) \div 1.$$

Розв'яжемо задачу знаходження  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  операційним методом. Складемо рівняння для знаходження  $S(x)$ , маємо:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}; \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$S'''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = - \left( \frac{\pi}{2} \delta(x) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x).$$

Маємо:

$$S'''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x), \quad S(0) = S''(0) = 0, \quad S'(0) - \text{поки невідомо.}$$

Далі:

$$S'''(x) \doteq p^3 S(p) - p^2 S(0) - pS'(0) - S''(0) = p^3 S(p) - pS'(0).$$

$$\frac{1}{2} \doteq \frac{1}{2p}; \quad \delta(x) \doteq 1,$$

рівняння в просторі зображень:

$$p^3 S(p) - pS'(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

звідки

$$S(p) = \frac{1}{2p^4} - \frac{\pi}{2p^3} + \frac{S'(0)}{p^2}.$$

Або

$$S(p) \doteq \frac{1}{2} \frac{x^3}{3!} - \frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2!} + S'(0)x = S(x),$$

при  $x = \pi$ , маємо

$$S(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n^3} = 0 = \frac{1}{12}\pi^3 - \frac{\pi}{4}\pi^2 + S'(0)\pi \implies S'(0) = \frac{\pi^2}{6},$$

тому

$$S(x) = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12} \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\pi^2 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^3}{32}.$$

На завершення автори висловлюють подяку професору Клесову О.І. за корисні обговорення даної роботи.

## References

- V. O. Bilyi, O. G. Bilyi. (2017). Finding finite sums, products and limits of some numerical sequences. Part 1. Application of methods of elementary mathematics and basic concepts of the theory of limits of numerical sequences. *Mathematics in Modern Technical University*, 2019(2), 61–74.
- Фіхтенгольц Г.М. (1969). *Курс диференціального та інтегрального числення. Том II, том III*. М.: Наука, 800 с., 656 с.

- Демидович Б.П. (1977). *Збірник задач і вправ з математичного аналізу*. М.: Наука, 528 с.
- Шелковніков Ф.А., Такайшвілі К.Г. (1968). *Збірник вправ з операційного числення*. М.: Вища школа, 255 с.

---

В.О. Білий, О.Г. Білий (2021). Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Частина 2. Застосування методів вищої математики. Відшукування сум рядів. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 19–37.

Submitted: 2021-09-22

Accepted: 2021-09-30

V. O. Bilyi, O. G. Bilyi (2021). Finding finite sums, products, and limits of some numerical sequences. Part 2. Application of methods of higher mathematics. Finding sums of series. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 19–37.

**Abstract.** Compared to the methods of elementary mathematics, the methods of higher mathematics significantly expand the range of possibilities when finding sums and products of elements of some numerical sequences and sums of numerical or functional series. This article examines the application of de Moivre's, Euler's formulas and Newton's binomial, examples are given. Considering a suitable function on the segment  $[a, b]$  and forming the corresponding integral Riemann sum for it, we find its value by integration. Using the Taylor & Maclaurin series of some known functions in  $R$  or  $C$ , integrating and differentiating the corresponding power and functional series, we obtain the sums we are looking for. An example of the application of the Wallis formula is given. Expanding some functions into a Fourier series, we find for certain values of the argument the sum of many interesting numerical series. An example of using Lyapunov's equality to calculate the sum of trigonometric series is given. The use of operational calculus methods for finding sums of numerical, functional and trigonometric series is considered, an example of the use of Dirac's  $\delta$ -function and its properties is given.

**Keywords:** sum, product, methods, functions of a complex variable, series, Fourier series, differentiation, integration, operational calculus, Dirac's delta function.