

Крайові задачі для лінійних сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

М. Б. Віра¹, П. Ф. Самусенко²

¹*Кафедра математики, фізики та економіки,
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна
(Department of Mathematics, Physics and Economics,
Nizhyn Gogol State University, Nizhyn, Ukraine)*

²*Кафедра теоретичних основ інформатики,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
(Department of Theoretical Foundations of Informatics,
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine)*

Анотація

У статті розглядаються основні етапи розвитку теорії асимптотичного інтегрування крайових задач для лінійних сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем. Необхідність розробки конструктивних методів наближеного інтегрування крайових задач для диференціально-алгебраїчних систем обумовлена важливістю їх практичного застосування в теорії нелінійних коливань, стійкості руху, теорії управління, радіотехніці, біології.

Авторами пропонується огляд літературних джерел, в яких розглядаються методи побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із виродженою матрицею при похідних за умови стабільності спектра граничної в'язки матриць. Відмічається, що проблема побудови асимптотичних розв'язків крайових задач для систем даного типу є мало вивченою, а тому актуальною. Зокрема, мало дослідженим залишається питання про умови існування

і єдиності розв'язків цих задач та розробка методів побудови їх асимптотики у різних випадках, що пов'язані із поведінкою спектра граничної в'язки матриць.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчна система; крайова задача; сингулярно збурена система.

MSC2010 34E10

УДК 517.928

1 Вступ

У даній статті розглядаються основні етапи розвитку теорії асимптотичного інтегрування крайових задач

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(0, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, h – натуральне число; $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці n -го порядку з дійсними або комплекснозначними елементами; $d(\varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ – відповідно l - та n -вимірний вектор-стовпці; M , N – сталі матриці розмірністю $l \times n$. При цьому передбачається, що матриця $B(t, \varepsilon)$ тотожно вироджена або вироджується з прямуюванням малого параметра до нуля.

На сьогодні в математичній літературі єдиної назви системи (1) не мають. Насамперед, це пов'язано з новизною об'єкту досліджень та з тими доволі специфічними властивостями розв'язків системи (1), які б хотіли виокремити ті, або інші дослідники. Системи (1) називають виродженими, диференціально-алгебраїчними, алгебро-диференціальними, неявними, сингулярними, дескрипторними. В подальшому ми такі системи називатимемо диференціально-алгебраїчними системами рівнянь.

Необхідність розробки конструктивних методів наближеного інтегрування крайових задач для диференціально-алгебраїчних систем обумовлена важливістю їх практичного застосування в теорії нелінійних коливань, стійкості руху, теорії управління, радіотехніці, біології тощо (Campbell, 1980, 1982).

2 Крайові задачі для лінійних сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

Природно, що передумовою досліджень властивостей розв'язків системи (1) були дослідження відповідних властивостей розв'язків незбуреної системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0; T], \quad (3)$$

де $f(t)$, $x(t)$ – відповідно заданий і шуканий n -вимірні вектори; $B(t)$, $A(t)$ – квадратні матриці n -го порядку, причому $\det B(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$.

Активне вивчення систем рівнянь вигляду (3) розпочалося з кінця 1970-х років. На сьогодні для таких систем розроблено загальну теорію і створено ефективні методи знаходження їх розв'язків. Значним внеском у розвиток загальної теорії диференціально-алгебраїчних систем та чисельних методів їх розв'язання стали праці Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, В. О. Данилова та О. О. Логінова (Boyarincev, 1980; Boyarincev, Danilov, Loginov, & Chistyakov, 1989). Зокрема, Бояринцев Ю. Є. в роботах (Boyarincev, 1980; Boyarincev et al., 1989) здійснив умовний поділ диференціально-алгебраїчних лінійних систем на регулярні та сингулярні і сформулював спеціальні крайові задачі для них у вигляді інтегралів Стільтьєса. Згідно з цим поділом система (3) називається регулярною, якщо виконуються умови:

- а) існує стале число c таке, що матриця $A(t) - cB(t)$ має обернену на заданому відрізку;
 - б) матриці $B(t)(A(t) - cB(t))^{-1}$, $(A(t) - cB(t))^{-1}B(t)$ мають нульовий чи одиничний індекс або зводяться до канонічного вигляду за допомогою сталої матриці.
- Система (3), яка не є регулярною, називається сингулярною.

За виконання умов а), б) систему (3) можна звести до вигляду

$$C(t) \frac{dx}{dt} = x + g(t), \quad (4)$$

що суттєво спрощує подальше знаходження її розв'язків (Boyarincev, 1980).

У працях багатьох математиків реалізується ідея побудови неособливих перетворень, за допомогою яких система (3) зводиться до системи із сталими матрицями. Зокрема, С. Кемпбелл в монографії (Campbell, 1980) навів необхідні і достатні умови звідності системи (3) до системи із сталими матрицями, а також показав, що система (3) зводиться до вигляду (4), якщо ранги матриць $A(t)$ і $B(t)$ є сталими на відрізку $[0; T]$, а ранг $(2n \times n)$ -матриці $[A(t), B(t)]$ дорівнює n .

У роботах С. Кемпбелла (Campbell, 1987; Campbell & Petzold, 1983), (Campbell & Meyer, 1979; Campbell, 1980, 1982), Л. Петцольд (Campbell & Petzold, 1983; Gear & Petzold, 1983, 1984), І. Гріпентрога (Griepentrog & Marz, 1986), Р. Мьорц (Marz, 1987, 1984, 1984), для відшукування розв'язків систем (3), (4) застосовуються різні методи зниження їх порядку.

Одним з фундаментальних понять теорії диференціально-алгебраїчних лінійних систем є поняття центральної канонічної форми, введене С. Кемпбеллом та Л. Петцольдом у 1983 році (Campbell & Petzold, 1983). Центральною канонічною формою системи (3) називається система вигляду

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} x + g(t), \quad (5)$$

де E_s , E_{n-s} – одиничні матриці s -го та $(n-s)$ -го порядку відповідно, N_s – верхньотрикутна матриця з нульовими квадратними блоками на діагоналі.

У працях (Boyarincev et al., 1989; Campbell, 1987) було доведено, що за умови аналітичності матриць $A(t)$, $B(t)$ звідність системи (3) до центральної канонічної форми є необхідною і достатньою умовою існування в неї загального розв’язку типу Коші.

Більш загальні умови звідності системи (3) до центральної канонічної форми тривалий час не вдавалось знайти. Одну з таких умов вказав В. Ф. Чистяков (Boyarincev et al., 1989), назвавши її критерієм “ранг-ступінь”: коли ранг матриці $B(t)$ сталий для всіх $t \in [0; T]$ і дорівнює степеню многочлена $\det(A(t) - \lambda B(t))$. Однак цей критерій є дуже жорстким і застосовний лише до вузького класу систем (3).

У 1993 році А. М. Самойленком і В. П. Яковцем було одержано найбільш загальні відомі на сьогодні достатні умови звідності системи (3) до центральної канонічної форми (критерій “ранг-ступінь” є їх частинним випадком) (Samoilenko & Yakovets, 1993). Зауважимо, що доведення відповідної теореми має конструктивний характер, оскільки дозволяє явно побудувати перетворювальні матриці, а виконання умов теореми забезпечує регулярність системи (3) та наявність у неї загального розв’язку типу Коші, який являє собою суму лінійної комбінації $n-s$ лінійно незалежних розв’язків однорідної системи та частинного розв’язку неоднорідної.

Використовуючи зазначену теорему, в (Samoilenko, Shkil', & Yakovets', 2000) знайдено достатні умови розв’язності задачі Коші для системи (3), введено поняття фундаментальної матриці для даної системи та узагальнено теорію Флоке-Ляпунова на диференціально-алгебраїчні системи з періодичними коефіцієнтами.

Починаючи із 80-х років 20-го століття дослідники звертають увагу на сингулярно збурені диференціально-алгебраїчні системи (1)

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad t \in [0; T],$$

де, як вже зазначалось раніше, ε – малий дійсний параметр.

Відомо, що одними із найбільш ефективних методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, що залежать від малого параметра, є асимптотичні методи, які ґрунтуються на ідеї побудови шуканих розв’язків у вигляді розвинень за степенями параметра. Хоча при цьому формальні ряди, за допомогою яких представляються розв’язки, є, як правило, розбіжними, але вирази, одержані шляхом обривання цих рядів на m -му члені, у багатьох випадках асимптотично прямують до відповідних точних розв’язків при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Розвиваючи ідеї побудови асимптотичного зображення розв’язків диференціальних рівнянь, що закладені ще на початку XIX століття у працях Ж. Штурма, Ж. Ліувілля та А. Пуанкаре, на сьогодні розроблено значну кількість методів асимптотичного інтегрування різних типів диференціальних рівнянь.

Серед найефективніших слід назвати метод Ляпунова-Пуанкаре, асимптотичні методи нелінійної механіки М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка (Bogoljubov & Mitropol'skij, 1974; Mitropol'skij, 1971), (Bogoljubov, Mitropol'skij, & Samojlenko, 1976), методи примежевих функцій А. М. Тихонова, А. Б. Васильєвої, В. Ф. Бутузова (Vasil'eva & Butuzov, 1973, 1978), методи асимптотичного інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь В. Вазова (Wasow, 1966), Е. Коддінгтона та Н. Левінсона (Coddington & Levinson, 1955), С. Ф. Феценка та М. І. Шкіля (Feshchenko, Shkil', & Nikolenko, 1967) та ін.

Питання побудови асимптотичного зображення розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, які містять параметр, розглядалось вже на початку ХХ століття у працях Л. Шлезінгера (Schlesinger, 1910) та Дж. Біркгофа (Birkhoff, 1908). Згідно із класичною теорією Шлезінгера-Біркгофа однорідна система

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (6)$$

у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння $\det(A(t, 0) - \lambda E) = 0$ має фундаментальну систему розв'язків вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_i(t) + \lambda_i(t, \varepsilon)) dt \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де $\lambda_i(t)$ – власне значення матриці $A(t, 0)$, а n -вимірний вектор $u_i(t, \varepsilon)$ і скалярна функція $\lambda_i(t, \varepsilon)$ зображаються у вигляді формальних розвинень за степенями параметра ε .

Проте питання про асимптотичне зображення розв'язків системи (6) у випадку кратних коренів характеристичного рівняння виявилось складним і залишалось невирішеним аж до 50-х років ХХ століття. Випадок кратних коренів характеристичного рівняння для системи вигляду (6) був всебічно вивчений М. І. Шкілем (Feshchenko et al., 1967) в 60-х роках ХХ століття. Йому вдалося показати, що лінійно незалежні розв'язки однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon) \quad (8)$$

з повільно змінними коефіцієнтами ($\tau = \varepsilon t$) зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями малого параметра ε , показники яких залежать як від кратності елементарних дільників, що відповідають кореням характеристичного рівняння, так і від поведінки коефіцієнтів системи. Аналогічні результати для сингулярно збурених систем та для сингулярно збурених систем з особливою точкою були отримані Й. Сибую та М. Івано (Sibuya, 1962; Iwano, 1963, 1964).

Асимптотичний аналіз сингулярно збурених систем, проведений в роботах С. Ф. Феценка і М. І. Шкіля, став поштовхом для дослідження систем виду (6)

із виродженою матрицею при похідних. Однак безпосередньо перенести результати досліджень систем (6) на системи із виродженою матрицею при похідних не вдавалося. Першими кроками в цьому напрямку можна вважати публікації американських математиків С. Кемпбела та Р. О'Меллі. Ними була розглянута автономна система, в якій матриця B залежить від параметра ε , але не залежить від t (O'Malley & Fhaherty, 1978). Зокрема, в (Campbell, 1980) побудовано асимптотичне розвинення фундаментальної матриці для системи вигляду

$$(A + \varepsilon B) \frac{dx}{dt} = Cx$$

за умови, що $\det(A + \varepsilon B) \neq 0$ при $\varepsilon > 0$ і в'язка матриць $C - \lambda A$ регулярна. Проблема побудови загального асимптотичного розв'язку виродженої системи

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad t \in [0; T], \quad (9)$$

була розв'язана у 1990-х роках В. П. Яковцем (Yakovets, 1990; Samoilenko et al., 2000) як у випадку неповного виродження ($\det B(t, \varepsilon) \neq 0$), так і у випадку повного виродження матриці при похідних ($\det B(t, \varepsilon) \equiv 0$). При цьому ним було встановлено, що у разі виродженості матриці $B(t, 0)$ система (9), крім класичних розв'язків типу (7), може мати групу розв'язків іншого вигляду

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \xi^{-1}(t, \varepsilon) dt \right), \quad (10)$$

де n -вимірний вектор $v(t, \varepsilon)$ та скалярна функція $\xi(t, \varepsilon)$ зображується у вигляді формальних розвинень за цілими або дробовими степенями ε . При цьому у випадку регулярності граничної в'язки $A(t, 0) - \lambda B(t, 0)$ перша група розв'язків, що будується відповідно до класичної теорії Шлезінгера-Біркгофа-Тамаркіна, відповідає скінченним елементарним дільникам цієї в'язки, а розв'язки другої групи системи (9) відповідають її нескінченним елементарним дільникам.

Використовуючи методи теорії збурень лінійних операторів та метод діаграм Ньютона, В. П. Яковцем було доведено, що у випадку регулярності граничної в'язки матриць $A(t, 0) - \lambda B(t, 0)$, стабільності її спектра та відповідних діаграм Ньютона система (9) задовольняє умови теореми про звідність до центральної канонічної форми і, отже, є регулярною при досить малих ε , а тому має загальний розв'язок типу Коші.

Якщо матриця $B(t, \varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon > 0$, то кількість розв'язків відповідної однорідної системи дорівнює n і вони утворюють загальний розв'язок цієї системи. У випадку, коли $\det B(t, \varepsilon) \equiv 0$ кількість зазначених розв'язків менша ніж n і дорівнює $n - k$, де k – сума довжин жорданових ланцюжків матриці $B(t, \varepsilon)$ відносно оператора $L(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - \varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{d}{dt}$.

Різноманітні прикладні задачі спричинили інтерес до розвитку теорії лінійних крайових задач. У 1926 році опубліковано статтю Г. Блісса ([Bliss, 1926](#)), в якій закладено основи цієї теорії. Фундаментальні результати в теорії крайових задач для лінійних систем диференціальних рівнянь в останні 30 років були отримані в роботах І. Т. Кігурадзе, Т. А. Чантурії ([Kiguradze & Chanturia, 1990](#); [Kiguradze, 1988](#)), А.М. Самойленка, О. А. Бойчука ([Boichuk & Samoilenko, 2004](#)), В.А. Михайлеця ([Mikhailets & Murach, 2014](#); [Gnyr, Mikhailets, & Murach, 2016](#)) та ін. Однак усі вони переважно стосуються систем диференціальних рівнянь, записаних в нормальній формі.

Разом з тим, методи розроблені зазначеними науковцями, іноді можна узагальнити і для крайових задач для диференціально-алгебраїчних систем. Так, О. А. Бойчук ([Boichuk & Samoilenko, 2004](#)) розглядає нетерову крайову задачу вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x + f(t), \quad t \in [0; T], \\ lx(\cdot) &= \alpha,\end{aligned}$$

де $A(t)$ квадратна матриця n -порядку, елементи якої дійсні, неперервні на відрізку $[0; T]$ функції, $f(t)$ – n -вимірний вектор-функція з неперервними компонентами, α – m -вимірний вектор констант із R^m , l – лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n -вимірних, неперервних на відрізку $[0; T]$ вектор-функцій.

Суттєва особливість таких задач полягає в тому, що вони зводяться до рівнянь з оператором, який не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач. У зазначеній монографії досліджується проблема знаходження конструктивних умов існування і побудови розв'язків таких крайових задач. Для лінійних нетерових операторів запропоновано нові конструкції узагальнено-обернених (псевдообернених) операторів і узагальнених операторів Гріна в банахових і гільбертових просторах, побудована загальна теорія вказаних крайових задач, здійснено класифікацію критичних і некритичних випадків.

Л. Каранджулов ([Karandjulov, 1996](#); [Samoilenko, Boichuk, & Karandjulov, 2001](#)) досліджує нетерові сингулярно збурені крайові задачі, застосовуючи метод приміжних функцій. Для лінійних сингулярно збурених крайових задач ним отримано умови існування і побудовано асимптотичні розв'язки в так званому стійкому та умовно стійкому некритичних випадках. Розглянуто також критичний випадок, коли серед власних значень головної матриці заданої системи диференціальних рівнянь є уявні.

Результати асимптотичного аналізу структури загального розв'язку диференціально-алгебраїчних лінійних систем, проведеного в ([Samoilenko et al., 2000](#)), спонукали до вивчення прикладних задач, що пов'язані із системами такого типу, зокрема, початкової і крайових задач та задач оптимального керування. Так, у

(Starun, 2002) розглядається двоточкова крайова задача вигляду

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0; T],$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = a(\varepsilon),$$

в якій $\det B(t) \equiv 0$, M , N – сталі квадратні матриці n -порядку, $a(\varepsilon)$ – n -вимірний вектор. Виходячи із припущення, що в’язка матриць $A(t, 0) - \lambda B(t)$ регулярна і задовольняє умову “ранг-ступінь”, вивчається питання про існування розв’язку даної задачі та будується його асимптотика.

Поряд із крайовими задачами для сингулярно збурених систем із виродженою матрицею при похідних активно вивчаються і крайові задачі для регулярно збурених систем. Зокрема, в праці (Boichuk & Shegda, 2007) досліджується лінійна неоднорідна крайова задача

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + f(t), \quad t \in [0; T], \quad (11)$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1 x, \quad (12)$$

де $A(t)$, $B(t)$, $A_1(t)$ – квадратні матриці n -го порядку, елементи яких є дійсними, достатню кількість разів диференційовними на відрізку $[0; T]$ функціями, $\det B(t) \equiv 0$, $f(t)$ – n -вимірний вектор-стовпець, α – m -вимірний вектор-стовпець констант; l , l_1 – лінійні векторні функціонали, визначені на просторі n -вимірних, неперервних на $[0; T]$ вектор-функцій.

Використовуючи метод Вишика-Люстерника і апарат псевдообернених матриць, запропоновано алгоритм відшукування розв’язків задач (11), (12) у випадку, коли кількість крайових умов, які задані лінійним векторним функціоналом, не збігається з кількістю невідомих у виродженій диференціальній системі.

У працях В.П. Яковця та М.Б. Віри (Yakovets & Vira, 2010) досліджується структура асимптотичних розв’язків крайової задачі (1), (2) детально розглядаються випадки, пов’язані з кронекеровою структурою та поведінкою спектра граничної в’язки матриць. При цьому припускається, що кронекерева структура граничної в’язки матриць є стабільною на певному проміжку. Якщо ж це не так, тобто існують точки, де зазначена структура змінюється, то питання побудови асимптотичних розв’язків крайової задачі (1), (2) залишається відкритим.

Висновки

З проведеного аналізу літературних джерел випливає, що на даний час достатньо добре розроблено методи побудови асимптотичних розв’язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із виродженою матрицею при похідних за умови

стабільності спектра граничної в'язки матриць. Однак проблема побудови асимптотичних розв'язків крайових задач для систем даного типу є мало вивченою, а тому актуальною. Зокрема, мало дослідженим залишається питання про умови існування і єдиності розв'язків цих задач та розробка методів побудови їх асимптотики у різних випадках, що пов'язані із поведінкою спектра граничної в'язки матриць.

References

- Birkhoff, G. D. (1908). On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.*(9), 219-231.
- Bliss, G. A. (1926). A boundary-value problem for a system of ordinary linear differential equations of first order. *Trans. Amer. Math. Soc.*(28), 561-584.
- Bogoljubov, N. N., & Mitropol'skij, J. A. (1974). *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations [in russian]*. Moscow: Nauka.
- Bogoljubov, N. N., Mitropol'skij, J. A., & Samojlenko, A. M. (1976). *Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics*. Berlin: Springer.
- Boichuk, A. A., & Samoilenko, A. M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*. Utrecht: VSP. The Netherlands.
- Boichuk, A. A., & Shegda, L. M. (2007). Degenerate noetherian boundary-value problems [in Ukrainian]. *Nonlinear Oscillations*, 10(3), 303-312.
- Boyarincev, Y. E. (1980). *Regular and singular systems of linear ordinary differential equations [in Russian]*. Novosibirsk: Nauka.
- Boyarincev, Y. E., Danilov, V. A., Loginov, A. A., & Chistyakov, V. F. (1989). *Numerical methods for solving singular systems [in Russian]*. Novosibirsk: Nauka.
- Campbell, S. L. (1980). *Singular systems of differential equations*. London: Pitman Adv. Publ. Programm.
- Campbell, S. L. (1982). *Singular systems of differential equations II*. Boston: Pitman Adv. Publ. Programm.
- Campbell, S. L. (1987). A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations. *SIAM J. Alg. Discrete Methods*, 18(4), 1101-1115.
- Campbell, S. L., & Meyer, C. D. (1979). *Generalized inverses of linear transformations*. London: Pitman.
- Campbell, S. L., & Petzold, L. R. (1983). Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. *SIAM J. Alg. Discrete Methods*, 4(4), 517-521.
- Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary differential equations*. New York: McGraw-Hill.
- Feshchenko, S. F., Shkil', N. I., & Nikolenko, L. D. (1967). *Asymptotic methods in the theory of linear differential equations*. New York: American Elsevier.

- Gear, C. W., & Petzold, L. R. (1983). Differential-algebraic systems and matrix pensil. *Lect. Notes Math*(973), 75-89.
- Gear, C. W., & Petzold, L. R. (1984). Ode methods for the solution of differential-algebraic systems. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 24(4), 716-728.
- Gnyp, E. V., Mikhailets, V. A., & Murach, O. O. (2016). On the criterion of continuous dependence on the parameter of solutions of total boundary value problems with respect to Sobolev spaces [in Ukrainian]. *Collection of works of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 13(2), 111-124.
- Griepentrog, E., & Marz, R. (1986). *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*. Leipzig: B.G. Teubner Verlagd gessellehaft.
- Iwano, M. (1963). Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I. *Funkcialaj Ekvacioj*, 5, 71-134.
- Iwano, M. (1964). Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II. *Funkcialaj Ekvacioj*, 6, 89-141.
- Karandjulov, L. I. (1996). Linear boundary value problems for singularly perturbed differential systems [in Russian]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*(7), 1-5.
- Kiguradze, I. (1988). Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 43(2), 2259-2339.
- Kiguradze, I. T., & Chanturia, T. A. (1990). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations [in russian]*. Moscow: Nauka.
- Marz, R. (1984). Multister methods for initial value problems in implicit differential-algebraic equations. *Beitgre zur Num. Mathem.*(12), 107-123.
- Marz, R. (1987). *Higher – index differential-algebraic equations: analytics and numerical treatment*. Berlin: Preprint/Humboldt Univ., Sect. Math.; 159.
- Mikhailets, V. A., & Murach, A. A. (2014). *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems*. Berlin: De Gruyter.
- Mitropol'skij, J. A. (1971). *Averaging method in nonlinear mechanics [in russian]*. Kyiv: Naukova Dumka.
- O'Malley, R. E., & Fhaherty, J. E. (1978). Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II. *Lect. Notes in Math.*(594), 422-436.
- Samoilenko, A. M., Boichuk, A. A., & Karandjulov, L. I. (2001). Fredholm boundary value problems with a singular perturbation [in Russian]. *Differential Equations*, 37(9), 1186-1193.
- Samoilenko, A. M., Shkil', M. I., & Yakovets', V. P. (2000). *Linear systems of differential equations with degenerations [in Ukrainian]*. Kyiv: Vyscha Shkola.
- Samoilenko, A. M., & Yakovets, V. P. (1993). On the reducibility of a degenerate linear system to a central canonical form [in Ukrainian]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*(4), 10-15.
- Schlesinger, L. (1910). Vorlesungen uber differentialgleichungen. *Bull. Amer. Math.*

- Soc.*(16), 483-489.
- Sibuya, Y. (1962). Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point. *Funkcialaj Ekvacioj*, 4, 29-56.
- Starun, I.I. (2002). Boundary-value problems for linear systems [in Ukrainian]. *Nonlinear Oscillations*, 5(4), 540-548.
- Vasil'eva, A.B., & Butuzov, V.F. (1973). *Singularly perturbed equations in critical cases [in russian]*. Moscow: Nauka.
- Vasil'eva, A.B., & Butuzov, V.F. (1978). *Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations [in russian]*. Moscow: Izdatel. Moskovskogo Universiteta Pt.
- Wasow, W. (1966). *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. New York: John Wiley and Sons Inc.
- Yakovets, V.P. (1990). Asymptotics of solutions of a linear singularity perturbed system with degeneracy [in Ukrainian]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 42(11), 1403-1409.
- Yakovets, V.P., & Vira, M.B. (2010). On construction of asymptotic solutions of two-point boundary-value problems for degenerate singularly perturbed systems of differential equations [in Ukrainian]. *Nonlinear Oscillations*, 13(2), 272-286.

М. Б. Віра, П. Ф. Самусенко (2021). Крайові задачі для лінійних сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 7–17.

Submitted: 2021-11-19

Accepted: 2021-11-25

M. B. Vira, P. F. Samusenko (2021). The boundary value problems for the linear singularly perturbed systems of differential-algebraic equations. *Mathematics in Modern Technical University*, 2021(1), 7–17.

Abstract. The article considers the main stages of the development of the theory of asymptotic integration of boundary-value problems for linear singularly perturbed differential-algebraic systems. The need of developing constructive methods of approximate integration of boundary-value problems for differential-algebraic systems is due to the importance of their practical application in the theory of nonlinear oscillations, stability of motion, control theory, radio engineering, and biology.

In the present paper the authors offer a review of literary sources, which consider the methods of constructing asymptotic solutions of singularly perturbed systems of differential equations with a degenerate matrix with derivatives under the condition of stability of the spectrum of the limit pencil of matrices. It is noted that the problem of constructing asymptotic solutions of boundary-value problems for systems of this type is poorly studied, and therefore relevant. In particular, the question of the conditions for the existence and uniqueness of the solutions of these problems and the development of methods for constructing their asymptotics in various cases related to the behavior of the spectrum of the limit pencil of matrices has been poorly researched.

Keywords: differential-algebraic system; boundary value problem; singularly perturbed system.