Mathematics in Modern Technical University
ISSN 2664-4258

*Mathematics in Modern Technical University, 2019*(1), 33–47
10.20535/mmtu-2017.7-777

# Про табличний запис інтегрування частинами

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова

*Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,*
*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

**Анотація**

У статті розглянуто табличний запис одно- й багаторазового інтегрування частинами. Цей спосіб оформлення розв'язання є поширеним в англомовній навчальній літературі, але відсутній в українських підручниках. Подано приклади застосування табличного запису до всіх 3 типів інтегралів, які вимагають інтегрування частинами. Продемонстровано ефективність такого запису також під час доведення теорем, де використовується багаторазове інтегрування частинами, зокрема, одержання формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі та властивості інтегрального перетворення Лапласа.

**Ключові слова:** невизначений інтеграл; визначений інтеграл; методи інтегрування; інтегрування частинами.

**MSC2010** 26A36

**УДК** 517.312

victor144169@gmail.com, fedorova_lb@yahoo.com.ua



Cite as: Haidey, V. O., & Fedorova, L. B. (2019). About tabular integration by parts. *Mathematics in Modern Technical University, 2019*(1), 33–47. 10.20535/mmtu-2017.7-777

# 1 Вступ

Метою статті є класифікувати випадки ефективного використання методу інтегрування частинами в невизначеному й визначеному інтегралах і пропагування табличного способу запису багаторазового інтегрування частинами. Метод інтегрування частинами в невизначеному інтегралі базується на формулі

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{1}$$

де функції $u(x)$ та $v(x)$ є неперервно диференційовними в деякому проміжку $(a; b)$.

Формулу (1) можна ще переписати так:

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Отже, інтегрування частинами перетворює інтегрування виразу $udv = uv'dx$ в інтегрування виразу $vdu = vu'dx$.

Застосовуючи інтегрування частинами в інтегралі, доводиться розбивати підінтегральний вираз на два множники: $u(x)$ та $v'(x)dx = dv(x)$, з яких, під час переходу до інтеграла у правій частині, перший диференціюють, а другий інтегрують. Оскільки інтегрується частина підінтегрального виразу, то звідси і назва методу — інтегрування частинами. Треба намагатись, щоб інтегрування диференціала $dv$ не викликало труднощів і щоб заміна $u$ на $du$ і $dv$ на $v$ в сукупності спрощувала підінтегральний вираз.

Маючи певний досвід інтегрування, під час інтегрування частинами можна не запроваджувати позначення $u$ та $v$, а користуватись формулою

$$\int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Приміром,

$$\int (2x-3)\sin x dx = \int (2x-3) d(-\cos x) =$$
$$= (2x-3)(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2dx =$$
$$= (3-2x)\cos x + 2\int \cos x dx = (3-2x)\cos x + 2\sin x + C.$$

# 2 Табличний запис одноразового інтегрування частинами

Реалізацію формули інтегрування частинами можна записати в табличному вигляді так:

$$\int u(x)v'(x)dx = \begin{vmatrix} u = u(x) & dv = v'(x)dx \\ du = u'(x)dx & v = v(x) \end{vmatrix} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

або, схематичніше

$$\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & \text{Похідна } u(x) & & \text{Первісна } v'(x) \\ + & \rightarrow & u(x) & \searrow & v'(x) \\ - & \rightarrow & u'(x) & \rightarrow & v(x) \end{array}$$

Стрілки вказують на множення функцій; перший член $+u(x)v(x)$ йде поза інтегралом, другий член $-u'(x)v(x)$ — під знаком інтеграла.

Приміром,

$$\int (2x-3)\sin x dx =$$
$$= \begin{vmatrix} \text{Знак} & & \text{Похідна } u & & \text{Первісна } v' \\ + & \rightarrow & 2x-3 & \searrow & \sin x \\ - & \rightarrow & 2 & \rightarrow & -\cos x \end{vmatrix} =$$
$$= (2x-3)(-\cos x) - \int 2(-\cos x)dx =$$
$$= (3-2x)\cos x + 2\int \cos x dx = (3-2x)\cos x + 2\sin x + C.$$

**Рекурентні формули.** Поєднуючи одноразове інтегрування частинами з перетворенням підінтегрального виразу, можна одержати рекурентні формули, приміром, для інтегралів:

$$\int \sin^n(kx+b)dx, \int \cos^n(kx+b)dx, \int \mathrm{sh}^n(kx+b)dx, \int \mathrm{ch}^n(kx+b)dx,$$
$$\int \sin^n(kx+b)\cos^m(kx+b)dx, \int \mathrm{sh}^n(kx+b)\mathrm{ch}^m(kx+b)dx,$$
$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.$$

У статті (Trofymenko & Fedorova, 2016) виведено рекурентну формулу для інтеграла

$$I_n = \int \mathrm{sh}^n x dx = \int \mathrm{sh}^{n-1} x \cdot \mathrm{sh}\, x dx.$$

Інтегруючи частинами, дістаємо співвідношення:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & \text{Похідна } u & & \text{Первісна } v' \\ + & \to & u(x) = \operatorname{sh}^{n-1}x & \searrow & v'(x) = \operatorname{sh} x \\ - & \to & u'(x) = (n-1)\operatorname{sh}^{n-2}x \operatorname{ch} x & \to & v(x) = \operatorname{ch} x \end{array}$$

Тобто

$$I_n = \operatorname{sh}^{n-1}x \cdot \operatorname{ch} x - \int (n-1)\operatorname{sh}^{n-2}x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx.$$

Оскільки $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, то:

$$\begin{aligned} I_n = {} & \operatorname{sh}^{n-1}x \cdot \operatorname{ch} x - (n-1)\int \operatorname{sh}^{n-2}x \cdot (1 + \operatorname{sh}^2 x)dx = \\ & = \operatorname{sh}^{n-1}x \cdot \operatorname{ch} x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Отже,

$$I_n = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1}x \cdot \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

# 3 Табличний запис багаторазового інтегрування частинами

Після $n$-кратного інтегрування частинами в інтегралі $\int uv'dx$ дістаємо узагальнену формулу інтегрування частинами (Fikhtengolz, 2009)

$$\begin{aligned} \int uv'dx = uv - u'v^{(-1)} + u''v^{(-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v^{(-n)} + \\ + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v^{(-n)}dx = \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)}v^{(-k)} + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v^{(-n)}dx, \end{aligned} \tag{2}$$

де $v^{(-1)}, v^{(-2)}, \ldots, v^{(-n)}$ відповідно первісні функцій $v, v^{(-1)}, \ldots, v^{(-n+1)}$.

Для формули (2) можна записати такі правила.

1. Інтеграл від добутку двох функцій дорівнює сумі зінтегрованої частини, яка містить членів, і додаткового інтеграла. Знаки всіх членів чергуються, починаючи зі знаку «плюс».

2. Перший член дорівнює добутку одного із множників підінтегральної функції на первісну від другого множника.

3. Кожен наступний член зінтегрованої частини також є добутком двох множників, які дістають з попереднього члена за тим самим правилом: множник,

одержаний диференціювання ще раз диференціюють, а другий множник інтегрують.

Підінтегральну функцію додаткового інтеграла дістають з останнього члена зінтегрованої частини так: множник, одержаний інтегруванням, переписують без змін, другий множник диференціюють. Перед інтегралом ставлять належний знак.

Знаходження послідовних похідних і первісних зручно оформлювати в табличному вигляді, що водночас зменшить і кількість можливих помилок.

| Знак | | Похідні $u$ | | Первісні $v'$ |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $\rightarrow$ | $u$ | $\searrow$ | $v'$ |
| $-$ | $\rightarrow$ | $u'$ | $\searrow$ | $v$ |
| $+$ | $\rightarrow$ | $u''$ | $\searrow$ | $v^{(-1)}$ |
| ... | ... | .... | .... | ... |
| $(-1)^n$ | $\rightarrow$ | $u^{(n)}$ | $\searrow$ | $v^{(-n+1)}$ |
| $(-1)^{n+1}$ | $\rightarrow$ | $u^{(n+1)}$ | $\rightarrow$ | $v^{(-n)}$ |

Цей метод запису інтегрування був запропонований у статті (Folley, 1947) і широко використовують в англомовних підручниках (Anton, Bivens, & Davis, 2015) і методичних статтях (Brown, 1960; Gillman, 1991; Horowitz, 1990; Khattri, 2008; Mrayyan, 2014; Murty, 1980; Nicol, 1993; Rock, 2016).

Для ефективного використання багаторазового інтегрування частинами можливі 3 випадки.

# 4 Перший випадок інтегрування частинами

У разі якщо $u(x) = P_n(x)$ — многочлен $n$-го порядку, то формула (2) набуває простішого вигляду:

$$\int u(x)v'(x)dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)}(x)v^{(-k)}(x), \tag{3}$$

оскільки $(P_n(x))^{(n+1)} = 0$.

Для $v'(x) \in \{a^{kx+b}, \sin(kx+b), \cos(kx+b), \mathrm{sh}(kx+b), \mathrm{ch}(kx+b)\}$ та $v'(x) = (ax+b)^{\alpha}, \alpha \notin \mathbb{Z}_{-}$, множник $v'(x)$ та його первісні легко інтегруються, отже, за формулою (3) досить легко одержуємо результат багаторазового інтегрування частинами. Приміром, запишімо в табличному вигляді формулу для інтеграла

$\int P_n(x)e^{kx+b}dx.$

$$\begin{array}{ccccc}
+ & \rightarrow & P_n(x) & \searrow & e^{kx+b} \\
- & \rightarrow & P_n'(x) & \searrow & \frac{1}{k}e^{kx+b} \\
+ & \rightarrow & P_n''(x) & \searrow & \frac{1}{k^2}e^{kx+b} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(-1)^n & \rightarrow & P_n^{(n)}(x) & \searrow & \frac{1}{k^n}e^{kx+b} \\
(-1)^{n+1} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \frac{1}{k^{n+1}}e^{kx+b}
\end{array}$$

Отже, дістаємо формулу (Fikhtengolz, 2009):

$$\int P_n(x)e^{kx+b}dx = \frac{e^{kx+b}}{k}\left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{k} + \frac{P_n''(x)}{k^2} - \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{k^n}\right) + C.$$

Так само можна одержати формули:

$$\int P_n(x)\sin(kx+b)dx = \frac{\sin(kx+b)}{k}\left(\frac{P_n'(x)}{k} - \frac{P_n'''(x)}{k^3} + \ldots\right) - \\ - \frac{\cos(kx+b)}{k}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{k^2} + \ldots\right) + C.$$

$$\int P_n(x)\cos(kx+b)dx = \frac{\sin(kx+b)}{k}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{k^2} + \ldots\right) + \\ + \frac{\cos(kx+b)}{k}\left(\frac{P_n'(x)}{k} - \frac{P_n'''(x)}{k^3} + \ldots\right) + C.$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{sh}(kx+b)dx = -\frac{\mathrm{sh}(kx+b)}{k}\left(\frac{P_n'(x)}{k} + \frac{P_n'''(x)}{k^3} + \ldots\right) + \\ + \frac{\mathrm{ch}(kx+b)}{k}\left(P_n(x) + \frac{P_n''(x)}{k^2} + \ldots\right) + C.$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{ch}(kx+b)dx = \frac{\mathrm{sh}(kx+b)}{k}\left(P_n(x) + \frac{P_n''(x)}{k^2} + \ldots\right) - \\ - \frac{\mathrm{ch}(kx+b)}{k}\left(\frac{P_n'(x)}{k} + \frac{P_n'''(x)}{k^3} + \ldots\right) + C.$$

$$\int P_n(x)(kx+b)^\alpha dx =$$
$$= \frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)}\left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)(kx+b)}{k(\alpha+2)} + \frac{P_n''(x)(kx+b)^2}{k^2(\alpha+2)(\alpha+3)} - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)(kx+b)^n}{k^n(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}\right) + C.$$

Першу та другу з поданих формул виписано в (Fikhtengolz, 2009). Конкретні приклади двократного інтегрування частинами подано в працях (Trofymenko & Fedorova, 2016) та (Haidey & Fedorova, 2017a).

Інтеграл вигляду $\int \frac{P_n(x)}{(kx+b)^m}dx, m \in \mathbb{N}$, випадає із загальної схеми, оскільки для $n > m$ маємо

$$v'(x) = \frac{1}{(kx+b)^m}, \quad v^{(-m+1)}(x) = \frac{A}{kx+b}, v^{(-m)} = \frac{A}{k}\ln|kx+b|, A = \mathrm{const},$$

і подальше інтегрування вже є складнішим. Цей інтеграл простіше зінтегрувати заміною змінної:

$$kx+b = t, x = \frac{t-b}{k}, dx = \frac{1}{k}dt.$$

Тоді,

$$\int \frac{P_n(x)}{(kx+b)^m}dx = \frac{1}{k}\int P_n\left(\frac{t-b}{k}\right)\frac{dt}{t^m}.$$

# 5 Другий випадок інтегрування частинами

До 2-го випадку, коли застосовують інтегрування частинами, належать інтеграли вигляду:

$$\int P_n(x)g^m(x)dx,$$

де

$$g(x) \in \{\log_a(kx+b), \arcsin(kx+b), \arccos(kx+b),$$
$$\mathrm{arctg}(kx+b), \mathrm{arcctg}(kx+b)\}, m \in \mathbb{N}.$$

До цього ж типу належить також інтеграл вигляду

$$\int x^\alpha \log_a^m x dx, m \in \mathbb{N}, \alpha \neq -1.$$

На відміну від 1-го випадку, тут за функцію $u$, яку диференціюють, вимушено доводиться вибирати $u = g^m(x)$. А отже, многочлен доводиться інтегрувати і його степінь при цьому зростає. Повторне інтегрування вимагає перетворення підінтегральної функції і тому для більшості цих інтегралів табличний запис незастосовний.

Інтеграл

$$\int x^\alpha \ln^m x dx, \alpha \neq -1,$$

підстановкою $t = \ln x$ (Fikhtengolz, 2009) можна звести до вигляду

$$\int t^m e^{(\alpha+1)t} dt.$$

У випадку $m = 1$ цей інтеграл можна знайти в табличному вигляді, а для $m = 2, 3, ...,$ його треба дещо модифікувати.

Знайдімо, приміром,

$$\int x^\alpha \ln x dx, \alpha \neq -1.$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & \text{Похідна } u & & \text{Первісна } v' \\ + & \rightarrow & u = \ln x & \searrow & v' = x^\alpha \\ - & \rightarrow & u' = \frac{1}{x} & \rightarrow & v = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \end{array}$$

$$\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$

Знайдімо також

$$\int x^\alpha \ln^m x dx, \alpha \neq -1.$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{Знак} & & \text{Диф.} & & & \text{Інт.} \\ + & \rightarrow & \ln^m x & \searrow & & x^\alpha \\ - & \rightarrow & m\ln^{m-1} x & \cdot\frac{1}{x} & \rightarrow & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ & & m\ln^{m-1} x & \searrow & & \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} \\ + & \rightarrow & m(m-1)\ln^{m-2} x & \cdot\frac{1}{x} & \rightarrow & \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \\ & & m(m-1)\ln^{m-2} x & \searrow & & \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} = \frac{x^\alpha}{(\alpha+1)^2} \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ (-1)^m & \rightarrow & m! & \cdot\frac{1}{x} & \rightarrow & \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^m} \\ & & m! & \searrow & & \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^m} = \frac{x^\alpha}{(\alpha+1)^m} \\ (-1)^{m+1} & \rightarrow & 0 & & \rightarrow & \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{m+1}} \end{array}$$

Одержали формулу (Prudnikov, Brychkov, & Maricev, 1998, 1.6.1.6):

$$\int x^\alpha \ln^m x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) \frac{\ln^{m-k} x}{(\alpha+1)^k} + C. \qquad (4)$$

Модифікація табличного способу інтегрування застосовна також до інтегралів вигляду $\int f(\ln x)dx$.

Так само можна знайти інтеграл

$$\int (ax^m+b)^n dx, n\in\mathbb{N}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Знак} & & \text{Диф.} & & & \text{Інт.}\\
+ & \to & (ax^m+b)^n & \searrow & & 1\\
- & \to & n(ax^m+b)^{n-1} & \cdot amx^{m-1} & \to & x\\
 & & n(ax^m+b)^{n-1} & \searrow & & amx^{m-1}\cdot x = amx^m\\
+ & \to & n(n-1)(ax^m+b)^{n-2} & \cdot amx^{m-1} & \to & \frac{amx^{m+1}}{m+1}\\
 & & n(n-1)(ax^m+b)^{n-2} & \searrow & & amx^{m-1}\cdot\frac{amx^{m+1}}{m+1} = \frac{a^2m^2x^{2m}}{m+1}\\
... & ... & ... & & ... & ...\\
(-1)^m & \to & n! & \cdot amx^{m-1} & \to & \frac{a^{n-1}m^{n-1}x^{(n-1)m+1}}{(m+1)(2m+1)...((n-1)m+1)}\\
 & & n! & \searrow & & \frac{a^nm^nx^{nm}}{(m+1)(2m+1)...((n-1)m+1)}\\
(-1)^{m+1} & \to & 0 & & \to & \frac{a^nm^nx^{nm+1}}{(m+1)(2m+1)...(nm+1)}
\end{array}$$

$$\int (ax^m+b)^n dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-am)^k\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(m+1)(2m+1)\dots(km+1)}(ax^m+b)^{n-k}x^{km+1}+C. \tag{5}$$

# 6 Третій випадок інтегрування частинами

Інтеграли вигляду

$$\int u(ax+b)v'(cx+d)dx,$$

де $u(x)\in\{e^x,\cos x,\sin x,\operatorname{ch} x,\operatorname{sh} x\}, v'(x)\in\{\cos x,\sin x,\operatorname{ch} x,\operatorname{sh} x\}$, можна знайти розв'язанням рівняння щодо шуканого інтеграла після двократного інтегрування частинами.

Зауважмо, що інтеграли від добутку двох тригонометричних чи двох гіперболічних функцій можна знайти також за допомогою відповідних перетворень підінтегральної функції.

Приміром, використовуючи табличний запис для двократного інтегрування частинами, дістаємо:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Знак} & & \text{Похідні } u & & \text{Первісні } v'\\
+ & \to & u(ax+b) & \searrow & v'(cx+d)\\
- & \to & au'(ax+b) & \searrow & \frac{1}{c}v(cx+d)\\
+ & \to & a^2u''(ax+b) & \to & \frac{1}{c^2}v^{(-1)}(cx+d)
\end{array}$$

Функції з розглядуваного переліку справджують співвідношення

$$u''(x) = Au(x), v^{(-1)}(x) = Bv'(x),$$

де $A, B \in \{-1, 1\}$. Отже,

$$\begin{gathered} X = \int u(ax+b)v'(cx+d)dx = \\ = \frac{1}{c}u(ax+b)v(cx+d) - \frac{a}{c^2}u'(ax+b)v^{(-1)}(cx+d) + \\ + \frac{a^2}{c^2}\int u''(ax+b)v^{(-1)}(cx+d)dx = \\ = \frac{1}{c}u(ax+b)v(cx+d) - \frac{a}{c^2}u'(ax+b)v^{(-1)}(cx+d) + \\ + \frac{a^2}{c^2}AB\underbrace{\int u(ax+b)v'(cx+d)dx}_{X}. \end{gathered}$$

Якщо $\frac{a^2}{c^2}AB = 1$, то метод не працює. Якщо ж $\frac{a^2}{c^2}AB \neq 1$, то розв'язуючи рівняння щодо шуканого інтеграла маємо:

$$X = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}AB\right)^{-1}\left(\frac{1}{c}u(ax+b)v(cx+d) - \frac{a}{c^2}u'(ax+b)v^{(-1)}(cx+d)\right) + C.$$

Знайдімо за цієї схемою інтеграл

$$X = \int \operatorname{ch} ax \sin bx dx.$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Знак} & & \text{Похідні } u & & \text{Первісні } v' \\ + & \to & \operatorname{ch} ax & \searrow & \sin bx \\ - & \to & a \operatorname{sh} ax & \searrow & -\frac{\cos bx}{b} \\ + & \to & a^2 \operatorname{ch} ax & \to & -\frac{\sin bx}{b^2} \end{array}$$

$$\begin{gathered} X = -\operatorname{ch} ax \cdot \frac{\cos bx}{b} + a \operatorname{sh} ax \cdot \frac{\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx dx; \\ \frac{a^2+b^2}{b^2}X = -\operatorname{ch} ax \cdot \frac{\cos bx}{b} + a \operatorname{sh} ax \cdot \frac{\sin bx}{b^2} + C; \\ X = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx\right) + \tilde{C}. \end{gathered}$$

# 7 Інтегрування частинами у визначеному та невластивому інтегралах

Запишімо узагальнену формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)}(x)v^{(-k)}(x)\Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int\limits_a^b u^{(n+1)}(x)v^{(-n)}(x)dx.$$

**1. Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі.** Покладімо в узагальненій формулі інтегрування частинами

$$b = x, u(t) = -f'(t), v'(t) = -1,$$

де функція $f$ є $(n+1)$ разів неперервно диференційовна на відрізку $[a; x]$, і застосуймо її до $(n-1)$-разового інтегрування частинами. Тоді,

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Знак} & & \text{Похідні } u & & \text{Первісні } v' \\
+ & \to & -f'(t) & \searrow & -1 \\
- & \to & -f''(t) & \searrow & (x-t) \\
+ & \to & -f'''(t) & \searrow & -\frac{(x-t)^2}{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots \\
(-1)^{n-1} & \to & -f^{(n)}(t) & \searrow & (-1)^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
(-1)^n & \to & -f^{(n+1)}(t) & \to & (-1)^{n+1}\frac{(x-t)^n}{n!}
\end{array}$$

$$\int\limits_a^x (-f'(t))(-1)dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k(-f^{(k+1)}(t))(-1)^{k+1}\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\right]\Bigg|_a^x +$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Остаточно дістаємо:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

**2. Формула для обчислення деяких визначених інтегралів.** Підставляючи у формулі (4) $\alpha = m = n \in \mathbb{N}$, дістаємо

$$\int (x\ln x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\frac{\ln^{n-k} x}{(n+1)^k} + C.$$

Отже, ураховуючи, що $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^{\alpha} x = 0$ та $\ln 1 = 0$, маємо ненульовий доданок тільки для $k = n$:

$$\int\limits_0^1 (x\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Підставляючи у формулі (5) $a = -1, b = 1, m = 2$, дістаємо

$$\int (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{3\cdot 5\cdot ...\cdot (2k+1)} (1-x^2)^{n-k} x^{2k+1} + C.$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2k+1)} (1-x^2)^{n-k} x^{2k+1}\Big|_0^1 =$$

$$= 2^n \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n+1)} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

**3. Теорема про диференціювання оригіналу.** Нехай функція $f(t)$ є функцією-оригіналом й існують такі сталі $A, b$ та $M$, що

$$\left|f^{(k)}(t)\right| \leqslant Ae^{bt} \ \ t \geqslant M$$

для всіх $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Тоді для $\operatorname{Re} p > b$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\}(p) - (f^{(n-1)}(0) + pf^{(n-2)}(0) + ... + p^{n-1}f(0)),$$

де $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ — перетвір Лапласа функції-оригіналу $f(t)$.

Справді, після $n$-разового інтегрування частинами

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Знаки} & & \text{Похідні } u & & \text{Первісні } v' \\
+ & \to & e^{-pt} & \searrow & f^{(n)}(t) \\
- & \to & (-p)e^{-pt} & \searrow & f^{(n-1)}(t) \\
+ & \to & (-p)(-p)e^{-pt} & \searrow & f^{(n-2)}(t) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(-1)^{n-1} & \to & (-1)^{n-1}p^{n-1}e^{-pt} & \searrow & f'(t) \\
(-1)^n & \to & (-1)^n p^n e^{-pt} & \to & f(t)
\end{array}$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f^{(n)}(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \left[e^{-pt}f^{(n-1)}(t) + pe^{-pt}f^{(n-2)}(t) + \ldots + p^{n-1}e^{-pt}f(t)\right]\Big|_0^{+\infty} + p^n \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= -\left(f^{(n-1)}(0) + pf^{(n-1)}(0) + \ldots + p^{n-1}f(0)\right) + p^n\mathcal{L}\{f(t)\}(p).$$

Інші застосування табличного інтегрування частинами в операційному численні розглянуто в (Haidey & Fedorova, 2017б).

# Висновки

Використання табличного запису інтегрування частинами перетворює рутинну, громіздку процедуру на прозорий процес. Його можна ефективно застосувати як для суто практичних задач, так і для доведення теорем, які потребують багаторазового інтегрування.

# References


Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2015). *Calculus. Early transcendents* (15th ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Brown, J. W. (1960). An extension of integration by parts. *The American Mathematical Monthly*, *67*(4), 372–372. https://doi.org/10.2307/2308987

Fikhtengolz, G. M. (2009). *A course of differential and integral calculus [in Russian]* (Vol. 2). Moscow: Fizmatlit.

Folley, K. W. (1947). Integration by parts. *The American Mathematical Monthly*, *54*(9), 542–543. https://doi.org/10.2307/2304674

Gillman, L. (1991). More on tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*, *22*(5), 407–410. https://doi.org/10.1080/07468342.1991.11973416

Haidey, V. O., & Fedorova, L. B. (2017a). About the application of the tabular integration by parts [in Ukrainian]. In *Collection of scientific works on the materials of the Distance All-Ukrainian Scientific Conference "Mathematics at the Technical University of the XXI Century", May 15–16, 2017, Kramatorsk* (pp. 94–96). Kramatorsk: Donbass State Engineering Academy.

http://www.slavdpu.dn.ua/fmk/publications/methodical%20articles/meth-art_16-all.pdf#page=95

Haidey, V. O., & Fedorova, L. B. (2017б). Application of the tabular integration by parts in operational calculus [in Ukrainian]. In *Proceedings of Eighteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7–10, 2017, Lutsk–Kyiv: Vol. 2.* (pp. 205–209). Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.
http://matan.kpi.ua/public/files/2017/kravchuk-conf2017/Kravchuk2017-vol2.pdf

Horowitz, D. (1990). Tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*, *21*(4), 307–311.
https://doi.org/10.1080/07468342.1990.11973325

Khattri, S. K. (2008). Fourier series and Laplace transform through tabular integration. *The Teaching of Mathematics*, *11*(2), 97–103.
http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/21/tm1125.pdf

Mrayyan, S. (2014). Tabular integration by parts the best short cut to perform integration. *International Journal of Current Research*, *6*(11), 9676–9684.
http://www.journalcra.com/sites/default/files/issue-pdf/6611.pdf

Murty, V. N. (1980). Integration by parts. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *11*(2), 90–94.
https://doi.org/10.2307/3026660

Nicol, S. J. (1993). Integrals of products of sine and cosine with different arguments. *The College Mathematics Journal*, *24*(2), 158–160.
https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973521

Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., & Maricev, O. I. (1998). *Integrals and series* (4th ed., Vol. 1. Elementary functions). Taylor & Francis.

Rock, J. A. (2016). A lecture on integration by parts. *arXiv preprint arXiv:1606.04141*.
https://arxiv.org/pdf/1606.04141.pdf

Trofymenko, V., & Fedorova, L. B. (2016). About of the tabular integration by parts [in Ukrainian]. In *Proceedings of Fourth International Scientific-Practic Conference "Mathematics in Modern Technical University", December 24–25, 2016, Kyiv* (pp. 208–211). Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.
http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf#page=208

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова (2019). Про табличний запис інтегрування частинами. *Mathematics in Modern Technical University, 2019*(1), 33–47.

*Submitted: 2019-02-15*
*Accepted: 2019-03-15*

V. O. Haidey, L. B. Fedorova (2019). About tabular integration by parts. *Mathematics in Modern Technical University, 2019*(1), 33–47.

**Abstract**. The article deals with the table entry of one and multiple integrations by parts. This way of solving the problem is widespread in the English language teaching literature, but it is not available in Ukrainian textbooks. Examples of application of a table entry for all 3 types of integrals that require integration by parts are given. The effectiveness of such a record is also demonstrated in the proofs of theorems, which uses multiple integrations by parts, in particular, to obtain a Taylor formula with the integral form of the remainder and properties of the Laplace integral transform.

**Keywords:** indefinite integral; definite integral; methods of integration; integration by parts