Mathematics in Modern Technical University
ISSN 2664-4258

Mathematics in Modern Technical University, 2019 (1), 5–13
10.20535/mmtu-2017.7-777

Дослідження властивостей r-узагальнених гіпергеометричних функцій

Н. О. Вірченко, О. В. Овчаренко

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Анотація

Метою статті є вивчення властивостей нових r-узагальнених гіпергеометричних і r-узагальнених бета-функцій. До дослідження цих функцій застосовано методи теорії спеціальних функцій, теорії інтегральних перетворень і операторів дробового інтегрування. Отримано співвідношення для запроваджених функцій із дробовими інтегральними операторами Сайґо. Ці результати можуть бути використані для подальшого розвитку теорії спеціальних функцій та їх широкого використання.

Ключові слова: гіпергеометрична функція; конфлюентна гіпергеометрична функція; бета-функція; дробові інтегральні оператори Сайґо.

MSC2010 33C15, 33B15

УДК 517.578

nvirchenko@hotmail.com, lena_rum@ukr.net

Cite as: Virchenko, V. O., & Ovcharenko, O. V. (2019). Investigation of properties of r-generalized hypergeometric functions. *Mathematics in Modern Technical University, 2019* (1), 5–13. 10.20535/mmtu-2017.7-777

1 Вступ

За останні роки посилився інтерес до узагальнення гама-, бета- та гіпергеометричних функцій, які мають різноманітні теоретичні і практичні застосування. З теорією спеціальних функцій пов'язана значна кількість різних математичних задач. Так спеціальні функції широко використовують для побудови різноманітних інтегральних перетворень, зокрема операторів Сайґо, Ердеї, Кобера, Саксени (Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, & Bateman, 1953; Virchenko, 2016; Kalla & Saxena, 1969)). Такі узагальнені інтегральні перетворення зі спеціальними функціями в ядрах дають можливість отримати розв'язки в аналітичному вигляді багатьох важливих класів диференціальних та інтегральних рівнянь (Kilbas & Saigo, 2004; Mathai, Saxena, & Haubold, 2009).

Аналіз сучасної літератури з теорії узагальнень гіпергеометричних функцій указує на те, що дослідження в теорії гіпергеометричних функцій та їх застосувань є актуальним та важливими, оскільки запровадження різноманітних узагальнень уже відомих спеціальних функцій, їхнє всебічне вивчення і дослідження дають змогу суттєво розширити клас задач, розв'язки яких можна побудувати в замкненому вигляді (Andrews, Askey, & Roy, 1999).

2 Узагальнена бета-функція

Серед спеціальних функцій важливе місце посідають бета-функція та її узагальнення завдяки їх широкому застосуванню як у теорії спеціальних функцій, так і в багатьох розділах прикладної математики.

Раніше нами було означено (τ,β)-узагальнену конфлюентну гіпергеометричну функцію

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau);\\(c;\beta)\end{matrix}\middle|\, zt^{\tau}\right]dt, $$

де ${}_1\Psi_1(z)$ — окремий випадок узагальненої функції Фокса—Райта (Erdélyi et al., 1953), та (τ,β)-узагальнену r-гіпергеометричну функцію (Virchenko & Ovcharenko, 2013)

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left[\begin{matrix}(\delta;\tau);\\(\gamma;\beta)\end{matrix}\middle|\, -\frac{r}{t(1-t)}\right]dt. \quad (1) $$

У статті (Virchenko & Ovcharenko, 2016) запроваджено таке узагальнення

Ойлерового інтеграла I роду (r-узагальнення бета-функції)

$$\tilde{B}(x,y;r)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt,$$

де $\operatorname{Re}x>0,\operatorname{Re}y>0$; $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$; $\operatorname{Re}r>0$; $\tau>0,\beta>0,\tau-\beta<1$.

Зауважмо, що за допомогою узагальненої конфлюентної r-гіпергеометричної функції (1) вже отримано нові узагальнення:

гама-функції ((Virchenko, 2016))

$${}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha,\gamma,\omega,r)=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t^\omega}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^\gamma}\right)dt,$$

дзета-функції (Virchenko, 2016)

$${}^r\zeta(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt,$$

функції Трікомі (Virchenko, 2016)

$${}^rU^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^\delta}\right)dt,$$

функцію Струве (Virchenko & Ovcharenko, 2018)

$$\tilde{H}_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(zt))dt.$$

Запровадьмо нову узагальнену бета-функцію у вигляді:

$$\tilde{B}^r(x,y;\lambda,\nu)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^\lambda(1-t)^\nu}\right)dt, \tag{2}$$

де $\operatorname{Re}x>0,\operatorname{Re}y>0$; $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\nu>0$; $\operatorname{Re}r>0$; $\tau>0,\beta>0,\tau-\beta<1$.

Дослідімо деякі властивості функції запровадженої функції.

1. Функція $\tilde{B}^r(x,y;\lambda;\nu)$ справджує співвідношення симетрії щодо змінних і параметрів:

$$\tilde{B}^r\left(x,y;\lambda,\nu\right)=\tilde{B}^r\left(y,x;\nu,\lambda\right).$$

2. Формули диференціювання узагальненої бета-функції щодо параметра r мають вигляд:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left\{\tilde{B}^r\left(x,y;\lambda,\nu\right)\right\}=(-1)^n\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(a+n\tau\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(c+n\beta\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 t^{x-n\lambda-1}(1-t)^{y-n\nu-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a+n\tau;c+n\beta;-\frac{r}{t^\lambda(1-t)^\nu}\right)dt,$$

де $n\in\mathbb{N}$.

3. Узагальнена бета-функція справджує такі рекурентні співвідношення:

$$\tilde{B}^r\left(x,y;\lambda,\nu\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{B}^r\left(x+n,y+1;\lambda,\nu\right), \tag{3}$$

$$\tilde{B}^r\left(x,1-y;\lambda,\nu\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(y+n)}{\Gamma(y)n!}\widetilde{B}^r\left(x+n,1;\lambda,\nu\right) \tag{4}$$

Доведення. Для доведення співвідношення (3) в зображенні (2) розгортаємо в ряд за степенями t функцію

$$(1-t)^{y-1}=(1-t)^y\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

Маємо:

$$\tilde{B}^r\left(x,y;\lambda,\nu\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 t^{x-1+n}(1-t)^y\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^\lambda(1-t)^\nu}\right)dt,$$

звідки випливає (3).

Рівність (4) можна довести так само після розгорнення $(1-t)^{-y}$ у ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(y)_n\frac{t^n}{n!}.$$

□

4. Після заміни $t=\frac{\xi}{1+\xi}$, одержуємо ще таке інтегральне зображення

$$\tilde{B}^r(x,y;\lambda,\nu)=\int\limits_0^\infty \xi^{x-1}(\xi+1)^{-x-y}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r(1+\xi)^{\lambda+\nu}}{\xi^\lambda}\right)d\xi. \tag{5}$$

3 Нове узагальнення гіпергеометричної функції

Запровадьмо нову узагальнену гіпергеометричну функцію у вигляді:

$$ {}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}_{\lambda,\nu}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \tilde{B}^r(b+n,c-b;\lambda;\nu) \frac{z^n}{n!}, \tag{6} $$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} r > 0$; $\tau > 0, \beta > 0, \tau - \beta < 1$; $\operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Re}\nu > 0$; $(a)_n$ — символ Похгаммера, $B(x,y)$ — класична бета-функція (Erdélyi et al., 1953).

Для $r = 0, \lambda = 1, \nu = 1$ отримуємо (τ,β)-узагальнену гіпергеометричну функцію (Virchenko, 2016)

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a,1);(c,\tau); \\ (c,\beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt. \tag{7} $$

Якщо у формулі (7) покласти $\beta = \tau$, то отримуємо τ-узагальнену гіпергеометричну функцію Ґауса (Virchenko, 2016):

$$ {}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-x)^{c-b-1} x^{b-1} (1-zx^\tau)^{-a} dx. $$

4 Інтегральне бета-перетворення від узагальненої гіпергеометричної функції

Розгляньмо бета-перетворення функції f (Sneddon, 1972)

$$ B\{f(z):x,y\} = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1} f(z) dz. \tag{8} $$

Теорема 4.1. *Якщо виконано умови* $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$, *то правдиве співвідношення:*

$$ B\{{}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}_{\lambda,\nu}(p+q,b;c;yz):p,q\} = B(p,q)\,{}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}_{\lambda,\nu}(p,b;c;y), \tag{9} $$

де $\operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Re}\nu > 0; \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0; \operatorname{Re} r > 0; \tau > 0, \beta > 0, \tau - \beta > 1;\ |y| < 1.$

Доведення. З означенням бета-перетворення (8) та узагальненої гіпергеометричної функції (6) випливає, що

$$ B\{{}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}_{\lambda,\nu}(p+q,b;c;yz):p,q\} = $$

$$ = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1} \frac{1}{B(b,c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} (p+q)_n \tilde{B}^r(b+n,c-b;\lambda,\nu) \frac{(yz)^n}{n!} dz = \dots $$

Змінімо порядок інтегрування та підсумовування:

$$\ldots = \frac{1}{B(b, c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} (p+q)_n \tilde{B}^r(b+n, c-b; \lambda, \nu) \frac{y^n}{n!} \int_0^1 z^{p+n-1}(1-z)^{q-1} dz.$$

Виражаючи інтеграл через класичну бета-функцію і використовуючи її властивість

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

отримаємо праву частину формули (9). □

5 Дія оператора дробового інтегрування на узагальнену гіпергеометричну функцію

Розгляньмо оператори дробового інтегрування Сайґо (Kilbas & Saigo, 2004):

$$(I_{0+}^{\mu,\alpha,\eta} f(t))(x) = \frac{x^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} {}_2F_1\left(\mu+\alpha, -\eta; \mu; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \tag{10}$$

$$(J_{-}^{\mu,\alpha,\eta} f(t))(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\mu-1} t^{-\mu-\alpha} {}_2F_1\left(\mu+\alpha, -\eta; \mu; 1-\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \tag{11}$$

де $\mu, \alpha, \eta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\mu > 0$.

Для $\alpha = -\mu$ оператори (10) та (11) перетворюються відповідно на лівосторонній та правосторонній оператори Рімана—Ліувіля:

$$(I_{0+}^{\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt,$$

$$(I_{-}^{\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\mu}} dt.$$

Теорема 5.1. *Якщо виконано умови існування інтегрального оператора (10) та функції* ${}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}(a, b; c; z)$, *то правдива формула:*

$$(I_{0+}^{\mu,\alpha,\eta}[t^{\sigma-1} {}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}(a, b; c; et)])(x) = x^{\sigma-\alpha-1} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma-\alpha+\eta)}{\Gamma(\sigma+\nu+\alpha)\Gamma(\sigma-\alpha)} \times$$
$$\times {}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}(a, b; c; ex) * {}_2F_2(\sigma, \sigma-\alpha+\eta; \sigma-\alpha, \sigma+\nu+\eta; ex),$$

де $x > 0$; $(f * g)(z)$ *— добуток Адамара для рядів (Müller, 1992).*

Доведення. Використовуючи означення (6) узагальненої гіпергеометричної функції та змінюючи порядок інтегрування та підсумовування, маємо:

$$\left(I_{0+}^{\mu,\alpha,\eta}[t^{\sigma-1}{}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}(a,b;c;et)]\right)(x) =$$
$$= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\tilde{B}^r(b+n,c-b;\lambda,\nu)\frac{e^n}{n!}(I_{0+}^{\mu,\alpha,\eta}t^{\sigma+n-1})(x) = \ldots$$

Використовуючи властивість інтегрального оператора Сайґо (Kilbas & Saigo, 2004):

$$(I_{0+}^{\nu,\alpha,\eta}t^{k-1})(x) = \frac{\Gamma(k)\Gamma(k-\alpha+\eta)}{\Gamma(k-\alpha)\Gamma(k+\nu+\eta)}x^{k-\alpha-1},$$

де $\operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Re}(k-\alpha+\eta) > 0$, одержуємо:

$$\ldots = x^{\sigma-\alpha-1}\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\tilde{B}^r(b+n,c-b;\lambda,\nu)\frac{z^n}{n!}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\sigma+n)\Gamma(\sigma-\alpha+\eta+n)}{\Gamma(\sigma-\alpha+n)\Gamma(\sigma+\nu+\eta+n)}\frac{(ex)^n}{n!}.$$

Використовуючи добуток Адамара для рядів:

$$(f*g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n,$$

де $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$, отримаємо твердження теореми. □

Теорема 5.2. *Якщо виконано умови існування інтегрального оператора (11) та узагальненої гіпергеометричної функції, то правдива формула:*

$$\left(J_{-}^{\nu,\alpha,\eta}\left[t^{\sigma-1}{}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}\left(a,b;c;\frac{e}{t}\right)\right]\right)(x) = x^{\sigma-\alpha-1}\frac{\Gamma(1-\sigma+\alpha)\Gamma(1-\sigma+\eta)}{\Gamma(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma+\alpha+\nu-\eta)}\times$$
$$\times{}_r\tilde{F}_{\lambda,\nu}^{\tau,\beta}\left(a,b;c;\frac{e}{x}\right)*{}_2F_2\left(1-\sigma+\alpha,1-\sigma+\eta;1-\sigma,1-\sigma-\eta+\nu+\alpha;\frac{e}{x}\right),$$

де $x > 0$.

Теорему 5.2 можна довести так само як і теорему 5.1, ураховуючи властивості оператора Сайґо (Kilbas & Saigo, 2004):

$$(J_{-}^{\nu,\alpha,\eta}t^{k-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(\eta-k+1)}{\Gamma(1-k)\Gamma(\alpha-k+\nu+\eta+1)}x^{k-\alpha-1},$$

де $\operatorname{Re}(\alpha-k+1) > 0, \operatorname{Re}(\eta-k+1) > 0$.

6 Висновки

Розглянуті в статті нові узагальнення гіпергеометричної та бета функцій відкривають ширші можливості для використання цих функцій у прикладних математичних, фізичних задачах. Планується застосувати нові r-узагальнені бета- та гіпергеометричні функції до розв'язання задач теорії імовірностей та математичної статистики, до теорії інтегральних рівнянь, біомедицини тощо.

Одержані результати можна також використати для подальшого глибшого застосування апарату теорії спеціальних функцій, що дасть можливість розв'язувати нові класи диференціальних та інтегральних рівнянь.

References

Andrews, G. E., Askey, R., & Roy, R. (1999). *Special functions.* Cambridge: Cambridge university press.
https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937

Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G., & Bateman, H. (1953). *Higher transcendental functions* (Vol. 1). New York: McGraw-Hill.

Kalla, S. L., & Saxena, R. K. (1969). Integral operators involving hypergeometric functions. *Mathematische Zeitschrift*, *108*(3), 231–234.
https://doi.org/10.1007/BF01112023

Kilbas, A. A., & Saigo, M. (2004). *H-transforms: theory and applications.* Boca Raton, FL: CRC Press.
https://doi.org/10.1201/9780203487372

Mathai, A. M., Saxena, R. K., & Haubold, H. J. (2009). *The H-function: theory and applications.* New York, NY: Springer-Verlag.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9

Müller, J. (1992). The Hadamard multiplication theorem and applications in summability theory. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *18*(3/4), 155–166.
https://doi.org/10.1080/17476939208814542

Sneddon, I. N. (1972). *The use of integral transforms.* New York, NY: McGraw-Hill.

Virchenko, N. O. (2016). *Generalized hypergeometric functions.* Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.

Virchenko, N. O., & Ovcharenko, O. V. (2013). r-Hypergeometric function and its application. *Research Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"*, *2013*(4), 19–22.
http://old.bulletin.kpi.ua/files/2013-4-3.pdf

Virchenko, N. O., & Ovcharenko, O. V. (2016). Generalization of Euler integral of the first kind [in Ukrainian]. *Research Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"*, *2016*(4), 27–31.
https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.4.77167

Virchenko, N. O., & Ovcharenko, O. V. (2018). The generalized Struve function [in Ukrainian]. *Dopovidi Nacionalnoi Akademii nauk Ukrainy*, *2018* (5), 3–7. https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.003

Н. О. Вірченко, О. В. Овчаренко (2019). Дослідження властивостей r-узагальнених гіпергеометричних функцій. *Mathematics in Modern Technical University, 2019* (1), 5–13.

Submitted: 2019-04-03
Accepted: 2019-05-15

V. O. Virchenko, O. V. Ovcharenko (2019). Investigation of properties of r-generalized hypergeometric functions. *Mathematics in Modern Technical University, 2019* (1), 5–13.

Abstract. The aim of paper is to study the properties of the new r-generalized hypergeometric and r-generalized beta functions. In the study were used the common methods of the theory of special functions, the theory of integral transforms and operators of fractional integration. We obtained relations for new introduced functions with fractional integral operators of Saigo. We used the concept of Hadamard product of power series in our investigation. Also there was establish formula for beta-transform of new r-generalized hypergeometric function. Integral transforms and fractional integral formulas involving hypergeometric function are interesting by themselves and play important roles in applications. These results can be used for further development of the theory of special functions and it widespread use.

Keywords: generalized hypergeometric function; confluent hypergeometric function; beta-function; fractional integral operators of Saigo.