Mathematics in Modern Technical University

Mathematics in Modern Technical University, 2018(1), 47–54
http://mmtu.matan.kpi.ua

Задача Коші для рівняння теплопровідності з лапласіаном за мірою

Д. М. Якимець

Кафедра математичних методів системного аналізу,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

fayanzar@gmail.com

Анотація

У статті розглянуто задачу Коші для параболічного рівняння у просторі з неінваріантною мірою, яку розв'язано для певних окремих випадків і в загальному. Також досліджено існування і єдиність її розв'язку в необмеженій області. Розв'язки для окремих випадків отримані за допомогою перетворення Фур'є, тоді як для розв'язання у загальному випадку використовується метод параметриксу. Для постановки задачі Коші використовується оператор Лапласа, побудований на основі поняття дивергенції за мірою.

Ключові слова: рівняння теплопровідності; оператор Лапласа; неінваріантна міра; задача Коші; дивергенція за мірою.

MSC2010 35K15

УДК 517.98+517.955

Cite as: Yakymets, D. (2018). Cauchy problem for the heat equation with Laplacian with respect to a measure. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 47–54.

1 Вихідні поняття

Нехай μ — скінченна (невід'ємна) міра на евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Позначмо через $C_b = C_b(\mathbb{R}^n)$ простір усіх обмежених та неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, через $C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ простір усіх неперервних обмежених векторних полів $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, через $C_b^1 = C_b^1(\mathbb{R}^n)$ (відповідно $C_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$) простір усіх функцій $f \in C_b$ (відповідно векторних полів $\mathbf{X} \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$), диференційовних у кожній точці $x \in \mathbb{R}^n$ з неперервною та обмеженою на усьому $\mathbb{R}^n$ похідною $f'(\cdot)$ (відповідно $\mathbf{X}'(\cdot)$).

Через $L_2(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$ позначимо гільбертів простір інтегровних із квадратом вимірних функцій на $\mathbb{R}^n$ відносно міри μ. Аналогічно через $L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; \mu)$ позначмо гільбертів простір квадратично інтегровних векторних полів на $\mathbb{R}^n$. Норму в $L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ задаємо формулою

$$\|\mathbf{Z}\|^2 = \int_H \|\mathbf{Z}(x)\|^2 \, d\mu,$$

де $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{n}}$ — потік векторного поля $\mathbf{n}$. Припускаємо диференційовність міри μ відносно поля $\mathbf{n}$ в сильному сенсі: для кожної борелевої множини $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ існує границя

$$\vartheta(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mu(\Phi_t(A)) - \mu(A)),$$

звідки випливає, що $\vartheta = \mathrm{d}_{\mathbf{n}}\mu$ є борелевою мірою (знакозмінною), абсолютно неперервною відносно μ. Логарифмічну похідну міри μ відносно поля $\mathbf{n}$ позначимо символом

$$\rho_\mu = \rho_\mu^{\mathbf{n}} \left(= \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{n} \right).$$

У подальшому розглядаємо міру μ, абсолютно неперервну відносно класичної міри Лебега λ в $\mathbb{R}^n$. Додаткова умова:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = g \in C_b^1(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

(або, загальніше, g — кусково гладка та обмежена з похідною функція на $\mathbb{R}^n$).

Правдиве

Твердження 1.1. *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, де $C_b^1(\mathbb{R}^n)$ — простір усіх неперервно диференційовних дійснозначних функцій на $\mathbb{R}^n$, обмежених на $\mathbb{R}^n$ разом зі своєю першою похідною. Якщо міра μ диференційовна вздовж векторного поля $\mathbf{Z}$, тоді міра $f \cdot \mu$ диференційовна вздовж $\mathbf{Z}$, і виконується рівність*

$$f \operatorname{div}_{f\cdot\mu} \mathbf{Z} = \operatorname{div}_\mu (f\mathbf{Z}) = f \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z} + (\mathbf{grad}\, f, \mathbf{Z}). \tag{2}$$

Також відомо, що якщо $\mathbf{Z} \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, то міра Лебеґа λ диференційовна вздовж $\mathbf{Z}$ і, більше того,

$$\operatorname{div}_\lambda \mathbf{Z} = \operatorname{div} \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z_k}{\partial x_k}$$

(див. (Bogachev, 2010), (Belopolskaya & Daletsky, 1990), (Bogdanskii & Sanzharevskii, 2014)).

Для кожної функції $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ (тут $C_b^2(\mathbb{R}^n)$ — простір двічі неперервно диференційовних функцій u на $\mathbb{R}^n$, обмежених на $\mathbb{R}^n$ разом зі своїми похідними $u'(\cdot), u''(\cdot)$) коректно визначено $\Delta u = \operatorname{div}_\mu(\mathbf{grad}\, u)$ (у загальному випадку — кусково неперервна на $\mathbb{R}^n$).

2 Постановка задачі Коші

Нехай $u : [0, +\infty] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, причому $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ неперервно диференційовна за t та двічі неперервно диференційовна за $x_1, \ldots, x_n$, і $\forall\, t \in [0, +\infty) : u(t, \cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Нехай μ — міра на $\mathbb{R}^n$, що задовольняє умову (1).

Стосовно введених означень розглянемо задачу Коші для параболічного рівняння виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{3}$$

де $\Delta u = \operatorname{div}_\mu(\mathbf{grad}\, u)$.

Зведімо це рівняння до диференціального рівняння в частинних похідних. Скориставшись (2), маємо:

$$\Delta u = \operatorname{div}_\mu(\mathbf{grad}\, u) = \operatorname{div}_{g\cdot\lambda}(\mathbf{grad}\, u) = \frac{g \operatorname{div}_\lambda(\mathbf{grad}\, u) + (\mathbf{grad}\, g,\ \mathbf{grad}\, u)}{g} =$$

$$= \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u) + \frac{(\mathbf{grad}\, g,\ \mathbf{grad}\, u)}{g} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln g}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right).$$

Отже, можемо записати задачу Коші (3) у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln g}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{4}$$

3 Окремі випадки

Спочатку розгляньмо міру μ на $\mathbb{R}^n$ з такою щільністю g відносно стандартної міри Лебеґа λ:

$$\begin{cases} g(x) = e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}; \\ g(x) = 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

$$\ln g(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i, x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial \ln g(x)}{\partial x_i} = -1, x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right); \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Перетворення Фур'є:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -v^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 - iv \sum_{k=1}^{n} \omega_k; \\ v(\omega, 0) = \tilde{\varphi}(\omega). \end{cases}$$

Розв'язуємо отримане диференціальне рівняння відносно змінної t, методом Бернуллі.

$$v' + ivB + v^2 A = 0;$$
$$v' + ivB = -v^2 A;$$
$$v = pq;$$
$$p'q + pq' + iqpB = -p^2 q^2 A;$$
$$p(q' + iqB) + p'q = -p^2 q^2 A;$$
$$q' + iqB = 0;$$
$$q = e^{-itB};$$
$$p' e^{-itB} = -p^2 e^{-2itB} A;$$
$$p' = -p^2 e^{-itB} A;$$
$$\frac{dp}{p^2} = -Ae^{-itB}\, dt;$$
$$-\frac{1}{p} = \frac{A}{iB} e^{-itB} + C;$$

$$v = pq = -\frac{iBe^{-itB}}{Ae^{-itB} + iBC} = -\frac{iB}{A + iBCe^{-itB}};$$

Скористаємося початковою умовою:

$$t = 0 : -\frac{iB}{A + iBC} = \tilde{\varphi}, C = -\frac{iB + A\tilde{\varphi}}{iB\tilde{\varphi}};$$

$$v = \frac{-iB}{A - e^{itB}\left(\frac{iB + A\tilde{\varphi}}{\tilde{\varphi}}\right)} = \frac{-iB\tilde{\varphi}}{A\tilde{\varphi}(1 - e^{itB}) - iBe^{itB}};$$

Підставляємо замість A та B вихідні вирази:

$$v(t, \vec{\omega}) = \frac{-i\tilde{\varphi}(\vec{\omega}) \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k}{\tilde{\varphi}(\vec{\omega})\left(1 - e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^2 - ie^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}.$$

Виконуючи обернене перетворення Фур'є, отримаємо

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{-i\tilde{\varphi}(\omega)e^{i(x,\omega)} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k}{\tilde{\varphi}(\omega)\left(1 - e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^2 - ie^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k}\, d\omega,$$

де $\tilde{\varphi}(\omega)$ — перетворення Фур'є початкової умови $\varphi(x)$.

Розгляньмо інший випадок — функцію, що відрізняється на константу від щільності гаусової міри (випадок $n = 1$):

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\ln g(x) = -\frac{x^2}{2};$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln g(x)}{\mathrm{d}x} = -x;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Аналогічно, виконаємо перетворення Фур'є:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -v^2\omega^2 + v + \omega\dfrac{\partial v}{\partial \omega}; \\ v(\omega, 0) = \tilde{\varphi}(\omega). \end{cases}$$

Розв'язуючи отримане диференціальне рівняння в частинних похідних і виконуючи обернене перетворення Фур'є, отримаємо $u(t,x)$:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\omega x}e^{t}\tilde{\varphi}\left(\omega e^{t}\right)}{\omega^{2}e^{t}\tilde{\varphi}\left(\omega e^{t}\right)\left(e^{t}-1\right)+1}\,d\omega,$$

де $\tilde{\varphi}(\omega)$ — перетворення Фур'є початкової умови $\varphi(x)$.

4 Дослідження загального випадку

У загальному випадку для поставленої задачі Коші розглядаємо диференціальний оператор L вигляду:

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}u}{\partial x_i^{2}}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\ln g}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,t),$$

з областю означення $\mathbb{R}^n\times[0,T]$. Щоб розв'язати задачу методом параметриксу (див. (Friedman, 2008)), розглянемо функцію

$$Z(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{n}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{\|x-\xi\|^{2}}{4(t-\tau)}}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (4) має вигляд

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{5}$$

де

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=Z(x,t;\xi,\tau)+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D}Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma\,.$$

$\Phi(x,t;\xi,\tau)$ шукаємо як суму інтегрального ряду

$$\sum_{v=1}^{\infty}(LZ)_v(x,t;\xi,\tau),$$

де $(LZ)_1=LZ$ і

$$(LZ)_{v+1}(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D}LZ(x,t;y,\sigma)(LZ)_v(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma\,.$$

Розв'язок задачі Коші (4) (5) існує та буде єдиним, якщо $\mathbf{grad} \ln g \in C_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, а $|\varphi(x)| \leqslant Ce^{\frac{\|x\|^2}{4T}}$ (Friedman, 2008). Якщо виконано вказані вище умови, то правдива також нерівність

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] \quad |u(x,t)| \leqslant C\|x\|^2.$$

5 Висновки

У роботі досліджується задача Коші для рівняння теплопровідності у скінченновимірному просторі у випадку неінваріантної міри. Для двох окремих випадків, які відповідають багатомірному експоненційному ймовірнісному розподілу та одномірному нормальному (без нормування одиницею) за допомогою перетворення Фур'є було знайдено аналітичні розв'язки. У загальному випадку методом параметриксу був знайдений фундаментальний розв'язок параболічного рівняння у вигляді інтегрального ряду. Також були наведені обмеження на початкові функції та щільність міри, за яких розв'язок задачі Коші існує та є єдиним; було показано, який вид він має. Як можна бачити, цих суттєвих обмежень, накладених на щільність розглянутої неінваріантної міри, достатньо для існування розв'язку відповідної задачі Коші. Тим не менш, у реальних фізичних задачах процеси теплопередачі розглядаються у твердих тілах, рідинах та газах, які є обмеженими, тому для застосувань, можливо, буде достатньо й слабших умов.

References

Belopolskaya, Y. I., & Daletsky, Y. L. (1990). *Stochastic equations and differential geometry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bogachev, V. I. (2010). *Differentiable measures and the Malliavin calculus* (No. 164). Providence, RI: American Mathematical Society.

Bogdanskii, Y. V., & Sanzharevskii, Y. Y. (2014). The Dirichlet problem with Laplacian with respect to a measure in the Hilbert space. *Ukrainian Mathematical Journal*, *66*(6), 818–826. https://doi.org/10.1007/s11253-014-0976-x

Friedman, A. (2008). *Partial differential equations of parabolic type*. Mineola, NY: Dover Publications.

Д. М. Якимець (2018). Задача Коші для рівняння теплопровідності з лапласіаном за мірою. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 47–54.

Submitted: 2018-07-25
Accepted: 2018-09-05

D. Yakymets (2018). Cauchy problem for the heat equation with Laplacian with respect to a measure. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 47–54.

Abstract. The purpose of this work is to build the heat equation in a space with finite variant measure, using the concept of divergence with respect to a measure, to get a solution of the initial vaule problem for some partial cases as well as the general fundamental solution, to prove uniqueness and existence of the solution of the corresponding initial value problem, to analyse the conditions the solution of the initial value problem exists and is unique under. The solutions for two partial cases are obtained by means of Fourier transformation, whereas general solution is obtained via the parametrix technique. The measure μ that is used in this work is considered as positive absolutely continuous w.r.t invariant Lebesgue measure, and its Radon–Nikodym derivative is piecewise smooth and is bounded with its first derivative on $\mathbb{R}^n$. If a vector field $\mathbf{Z}$ is smooth on $\mathbb{R}^n$, then μ is differentiable along $\mathbf{Z}$, and its logarithmic derivative along $\mathbf{Z}$ is denoted as $\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$. In this case Laplace operator is introduced on $C_b^2(\mathbb{R}^n)$ as $\Delta u = \operatorname{div}_\mu(\mathbf{grad}\, u)$, and thereby we can set standard Cauchy problem for heat equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u; \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

which is to be solved by means of aforementioned methods.

Keywords: heat equation; Laplace operator; variant measure; initial value problem; divergence with respect to a measure.