Mathematics in Modern Technical University

Mathematics in Modern Technical University, 2018(1), 33–46
http://mmtu.matan.kpi.ua

Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування рядів Тейлора

М. А. Веремій, М. В. Гаєвський, П. В. Задерей

Кафедра вищої математики,
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна

Кафедра математики,
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

koliaveremii@gmail.com, mgaevskij@gmail.com, zadereypv@ukr.net

Анотація

В роботі знайдено оцінки відхилень поліномів, породжених загальними лінійними методами підсумовування рядів Тейлора на просторах аналітичних функцій H^{ψ}_{∞} (задача Колмогорова–Нікольського). Ці класи, породжені послідовністю $\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}, \psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, є аналогами класів диференційовних функцій, що були введені О. І. Степанцем. На послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ накладаються умови Боаса–Теляковського. Відхилення поліномів розглядається в рівномірній метриці.

Ключові слова: ряди Тейлора; аналітичні функції; лінійні методи підсумовування; простори функцій; матриця комплексних чисел.

MSC2010 30H05, 30E10, 41A10, 42A10

УДК 517.5

Cite as: Veremii, M. A., Haevskyi, M. V., & Zaderei, P. V. (2018). Approximation of analytic functions by linear methods of summation of Taylor series. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 33–46.

1 Вступ

В даній роботі буде встановлена асимптотична рівність для точних верхніх меж граней відхилень поліномів, що породжуються загальними лінійними методами підсумовування рядів Тейлора, від аналітичних функцій з класів О. І. Степанця. Відхилення поліномів розглядається в рівномірній метриці.

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ z \in D \tag{1}$$

— розклад в ряд Тейлора–Маклорена аналітичної в крузі D функції,

$$S_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ z \in D$$

— частинна сума її ряду Тейлора–Маклорена, де $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Розглянемо множину H_∞ аналітичних в D функцій $f(z)$ з нормою

$$\|f\|_{H_\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty,$$

а UH — одинична куля в H_∞, тобто для $f \in UH$

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant 1.$$

Нехай $\{\psi(k)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$, а функція $f \in H_\infty$ з рядом Тейлора виду (1). Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞ для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, \ z \in D$$

є рядом Тейлора функції $f^\psi \in UH$. Вперше подібний клас функцій був розглянутий Шейком (Scheick, 1966).

Нехай задано трикутну матрицю комплексних чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $n < k$. Кожній функції $f \in H_\infty^\psi$ з рядом Тейлора (1) поставимо у відповідність поліном

$$U_n(f; \Lambda; z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_k z^k, \ z \in \overline{D}.$$

Тоді кажуть, що задано трикутний метод Λ підсумовування рядів Тейлора.

Для аналітичних функцій результатів, пов'язаних з підсумовуванням їх рядів Тейлора, значно менше, ніж аналогічних результатів для дійсних функцій. Зокрема, з наближенням аналітичних функцій $f \in H^{\psi}_{\infty}$ сумами Валле–Пуссена можна ознайомитись у роботі (Savchuk, Savchuk, & Chaichenko, 2010). У роботі (Savchuk, 2008) В. В. Савчук на подібному класі функцій розглянув лінійні методи підсумовування, що породжуються моментними послідовностями Λ.

О. М. Швецова (Shvetsova, 2000) розглянула загальні методи підсумовування рядів Тейлора та наклавши на послідовність ψ умови слабші, ніж опуклість, отримала такий результат.

Теорема (Shvetsova, 2000). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ — локально абсолютно неперервна функція на $[n+1, \infty)$, $\psi(k) \neq 0, k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$ та*

$$\widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi) = \int_{n+1}^{\infty} vraisup_{u \geqslant t} |\psi'(u)| dt < \infty, \tag{2}$$

і для функції φ виконуються наступні умови: $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ абсолютно неперервна на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$ і $\widetilde{V}^{1}_{0}((1 - \varphi(\cdot))\psi((n + 1)\cdot) < \infty$.

Тоді

$$\sup_{f \in H^{\psi}_{\infty}} \left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\Big(\frac{k}{n+1}\Big) a_k z^k \right\|_{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{|(1 - \varphi(1 - \frac{k}{n+1}))\psi(n + 1 - k) - \psi(k + n + 1)|}{k} +$$

$$+ \theta_1 \widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi) + \theta_2 \widetilde{V}^{1}_{0}((1 - \varphi(\cdot))\psi((n + 1)\cdot),$$

де $|\theta_i| \leqslant M,\ i = 1, 2$.

В даній роботі буде отримано оцінку величини $\|f(z) - U_n(f; \Lambda; z)\|_{\infty}$ на класі аналітичних функцій H^{ψ}_{∞}, де на послідовність ψ накладемо більш загальні умови ніж (2). Будемо говорити, що послідовність ψ задовольняє умови Боаса–Теляковського, якщо:

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0; \tag{3}$$

$$V(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\psi(k)| < \infty, \tag{4}$$

де $\triangle\psi(k) = \psi(k) - \psi(k + 1)$;

$$B(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty} \Big| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi(k - l) - \triangle\psi(k + l)}{l} \Big| < \infty. \tag{5}$$

Також для скорочення запису покладемо $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k$,

$$V_n(\psi) = \sum_{k=n}^{\infty} |\triangle\psi(k)|, \quad V_1^n(\psi) = \sum_{k=1}^{n} |\triangle\psi(k)|,$$

$$B_n(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty} \Big| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi(n+k-l) - \triangle\psi(n+k+l)}{l} \Big| \quad ,$$

та

$$B_1^n(\psi) = \sum_{k=2}^{n} \Big| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi(k-l) - \triangle\psi(k+l)}{l} \Big|.$$

Зазначимо, що для кусково-лінійних функцій ψ з вузлами в цілочислових точках умова

$$\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi) = \int_{n+1}^{\infty} \operatorname{vrai}\sup_{u\geqslant t} |\psi'(u)| dt < \infty$$

набуває вигляду

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{m\geqslant k} |\triangle\psi(m)| < \infty,$$

її ще називають умовою Сідона–Теляковського. В роботі (Fomin, 1978) доведено фактично таку нерівність

$$V(\psi) + B(\psi) \leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{m\geqslant k} |\triangle\psi(m)|,$$

де M — деяка абсолютна стала. Там же показано, що для послідовності $\triangle\psi(2^s) = \frac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k) = 0, k \neq 2^s$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\psi(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \triangle\psi(k)$ умови (3)–(5) мають місце, а умова (2) — ні (Fomin, 1978, с. 217).

Нехай далі $L_\infty(T)$ — простір істотно обмежених на T функцій f з нормою $\|f\|_{L_\infty(T)} = \operatorname{vraisup}_{z\in T}|f(z)|$, а $L_\infty(T)_+$ — підпростір істотно обмежених функцій на T, для яких коефіцієнти Фур'є з від'ємними індексами рівні 0, тобто $L_\infty(T)_+ = \{f \in L_\infty(T) : \widehat{f}(-k) = 0, k \in \mathbb{N}\}$ (Stepanets, 2002, с. 261). Множину функцій $f \in L_\infty(T)_+$, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $f^\psi \in L_\infty(T)_+$, позначимо через $L_\infty^\psi(T)_+$.

Зазначимо, що згідно з теоремою Голубєва–Привалова (Privalov, 1950, с. 202) простір $L_\infty(T)_+$ є простором граничних значень аналітичних в D функцій f, що зображаються інтегралом Коші. Тому коефіцієнти Тейлора–Маклорена таких функцій співпадають з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень, тобто

$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \widehat{f}(k), k = 0, 1, 2, \ldots$. Домовимося для $f \in H^{\psi}_{\infty}$ граничні значення позначати тим самим символом $f(e^{i\theta})$, $f \in L^{\psi}_{\infty}(T)_{+}$.

Сформулюємо допоміжні твердження, що стосуються оцінок інтегралів тригонометричних рядів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та деяких числових сум і рядів.

Лема 1.1. *1) Якщо коефіцієнти ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, a_k \in \mathbb{C}$ задовольняють умови (3)-(5), тоді цей ряд є збіжним і для довільного $s \in \mathbb{N}$ має місце оцінка*

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2s+1}}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right| dx - \sum_{k=1}^{s} \frac{|a_k|}{k} \right| \leqslant M \Big(V(a) + B(a) \Big). \tag{6}$$

2) Якщо коефіцієнти ряду $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, a_k \in \mathbb{R}$ задовольняють умови (3)-(5), то для довільного $m \in \mathbb{N}$ має місце оцінка

$$\left| \int_{0}^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_{m-k} - a_{m+k}|}{k} \right| \leqslant$$
$$\leqslant M \Big(V_1^m(a) + B_1^m(a) + V_m(a) + B_m(a) \Big). \tag{7}$$

3) Якщо коефіцієнти ряду $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, a_k \in \mathbb{R}$ задовольняють умови (3)–(5), то має місце оцінка

$$\int_{0}^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \leqslant M \Big(V(a) + B(a) \Big). \tag{8}$$

(Тут та далі символом M будемо позначати абсолютні сталі, можливо неоднакові у різних формулах.)

Зазначимо, що частину 1 леми 1.1 отримано фактично у (Telyakovskii, 1967), друга частина леми є наслідком теореми 1 з роботи (Telyakovskii, 1971, c. 73), а частину 3 отримано в (Telyakovskii, 1964).

Лема 1.2 (Haevskyi and Zaderei (2016))**.** *Якщо послідовність чисел $a = \{a_k\}$ задовольняє умови (3)–(5) і послідовності $b = \{b_k\}$, $c = \{c_k\}$ та $d = \{d_k\}$ задані наступним чином:*

$$b = \{b_k\} = \begin{cases} 0, & \text{коли } k \in [0, n] \bigcup [2n+2, \infty), \\ \left(\frac{k}{n+1} - 2\right) a_k, & \text{коли } k \in [n+1, 2n+1], \end{cases}$$

$$c = \{c_k\} = \begin{cases} 0, & \text{коли } k \in [0, n], \\ \left(\frac{k}{n+1} - 1\right) a_k, & \text{коли } k \in [n+1, 2n+1], \\ a_k, & \text{коли } k \geqslant 2n+2, \end{cases}$$

та
$$d=\{d_k\}=\begin{cases}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)a_k, & \text{коли } k\in[0,n],\\ 0, & \textit{коли } k>n.\end{cases}$$

Тоді мають місце наступні співвідношення:

$$B_n(b)\leqslant M\Big(V_n(a)+B_n(a)\Big),$$

$$B_n(c)\leqslant M\Big(V_n(a)+B_n(a)\Big),$$

$$B_n(d)\leqslant M\Big(V_n(a)+B_n(a)\Big).$$

2 Основний результат

Наступне твердження показує швидкість наближення аналітичних функцій з класу H^{ψ}_{∞} лінійними методами підсумовування рядів Тейлора.

Теорема 2.1. *Нехай функція $f\in H^{\psi}_{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$, послідовність ψ задовольняє умови (3)–(5), $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}, k=0,1,\ldots,n$, $\lambda_0=1$, $\lambda_k=0$ для $n<k$, — деяка послідовність комплексних чисел, така що $V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)<\infty$. Тоді*

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}}\|f(z)-U_n(f,\Lambda,z)\|_{\infty}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)|}{k}+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big), \tag{9}$$

де $(1-\Lambda)\psi=\{(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)\}$, $k=0,1,\ldots,n$.

Доведення. Оскільки за умов теореми функція

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\psi(k)z^k+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\Big(-1+\frac{k}{n+1}\Big)\psi(k)z^k+\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)z^k$$

є аналітичною функцією в крузі D та сумовною на одиничному колі T, тому врахувавши представлення
$$a_k=\frac{\psi(k)}{2\pi i}\int_T\frac{f^{\psi}(w)}{w^{k+1}}dw,$$
підставивши яке у формулу (1), отримаємо для $z\in D$

$$f(z)=a_0+\frac{1}{2\pi i}\int_T f^{\psi}(w)\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)(z\overline{w})^k\frac{dw}{w}=$$

$$= a_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_T f^{\psi}(w)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)(z\overline{w})^k + \sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\psi(k)(\overline{z}w)^k +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\Big(-1+\frac{k}{n+1}\Big)\psi(k)(\overline{z}w)^k + \sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)(\overline{z}w)^k\Big)\frac{dw}{w}.$$

Розглянемо різницю

$$f(z) - U_n(f,\Lambda,z) = \sum_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, z \in D.$$

Згідно принципу максимуму модуля справедливе співвідношення

$$\|f(z) - U_n(f,\Lambda,z)\|_\infty = \|f(e^{i\theta}) - U_n(f,\Lambda,e^{i\theta})\|_{L_\infty(T)},$$

тобто, наша задача зводиться до аналогічної задачі на класі $L^{\psi}_{\infty}(T)_+$.

Тоді записавши $z = e^{i\theta}$ та $w = e^{it}$, матимемо

$$f(e^{i\theta}) - U_n(f,\Lambda,e^{i\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\Big(\sum_{k=1}^{n}(2-\frac{k}{n+1})(1-\lambda_k)\psi(k)\cos kt +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k}{n+1}\psi(k)\cos kt + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt -$$

$$- i\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)\sin kt - i\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)\sin kt\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{-ikt} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})(1-\lambda_k)\psi(k)\cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\Big)dt.$$

Поклавши у формулі (7) $m = n$ та врахувавши лему 1.2 з нерівністю

$$\frac{|\Re z| + |\Im z|}{2} \leqslant |z| \leqslant |\Re z| + |\Im z|,$$

отримаємо оцінку для інтеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|2\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})(1-\lambda_k)\psi(k)\cos kt +$$

$$+ 2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\Big|dt =$$

$$= O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big),$$

тому отримаємо

$$\|f(z)-U_n(f,\Lambda,z)\|_\infty =$$
$$= \Big\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(e^{i(t+\theta)})\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{-ikt}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt\Big\|_\infty +$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{-ikt}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big|dt+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{-ikt}+e^{-i(n+1)t}\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-ikt}\Big|dt+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{i(n+1-k)t}+\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-ikt}\Big|dt+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)e^{ikt}+\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-ikt}\Big|dt+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\Big((1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)+\psi(k+n+1)\Big)\cos kt\Big|dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\Big((1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)\Big)\sin kt\Big|dt+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)). \quad (10)$$

Оцінимо інтеграли в співвідношенні (10) використавши (8) та лему 1.2, тому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\Big((1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)+\psi(k+n+1)\Big)\cos kt\Big|dt\leqslant$$
$$\leqslant O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)). \quad (11)$$

Для оцінки другого інтегралу використаємо (6) та лему 1.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\Big((1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)\Big)\sin kt\Big|dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)|}{k}+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi))\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)|}{k}+$$
$$+O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)). \tag{12}$$

Підставивиши оцінки (11) та (12) в (10), отримаємо нерівність

$$\sup_{f\in H_\infty^\psi}\|f(z)-U_n(f,\Lambda,z)\|_\infty\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)|}{k}+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big).$$

Тепер покажемо існування функції $\Phi\in H_\infty^\psi$, для якої $\Phi^\psi(\cdot)=\varphi(\cdot)$, $\varphi\in UH$ та

$$\|\Phi(z)-U_n(\Phi,\Lambda,z)\|_\infty=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)|}{k}+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big).$$

Міркуючи як при отриманні (10) та використавши твердження лем 1.1 та 1.2, будемо мати

$$\|\Phi(z)-U_n(\Phi,\Lambda,z)\|_\infty\geqslant|\Phi(1)-U_n(\Phi,\Lambda,1)|=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}(1-\lambda_k)\psi(k)e^{-ikt}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}dt\right|+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})((1-\lambda_k)\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1))\sin ktdt\right|+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})((1-\lambda_k)\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1))e^{ikt}dt\right|+$$
$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big).$$

Розглянемо поліном

$$P_n(z)=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})((1-\lambda_k)\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1))z^k.$$

За його коефіцієнтами можемо побудувати многочлен $Q_{2n}(z)$ порядку $2n$ та функцію φ з нижчевказаними властивостями.

Як відомо (Goluzin, 1969, с. 489, теорема 6), існує єдиний многочлен виду

$$Q_{2n}(z) = (\alpha_0 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu)^2(\beta_0 + \ldots + \beta_{n-\nu}z^{n-\nu})(\overline{\beta}_{n-\nu} + \ldots + \overline{\beta}_0 z^{n-\nu}),$$

де $\nu \leqslant n$, $\alpha_0 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$, а α_k та β_k пов'язані наступним співвідношенням

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n+1})((1-\lambda_k)\psi(n+1-k) - \psi(n+k+1))z^k + \sum_{k=n+1}^{2n} \varrho_k z^k$$

і який серед аналітичних в одиничному крузі функцій f, для яких частинна сума ряду Тейлора порядку n співпадає із $P_n(z)$, дає найменше значення для величини

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})| dt.$$

Покладемо тепер

$$\varphi(z) = \varepsilon \frac{\overline{\alpha}_\nu + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^\nu}{\alpha_0 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu}, \ |z| = 1, |\varepsilon| = 1,$$

причому функція $\varphi(z)$ буде мати наступні властивості (Goluzin, 1969, с. 491–492):

1) майже скрізь $|\varphi(z)| \leqslant 1$ та $\varphi(z)$ є аналітичному при $z \leqslant 1$;

2) $\arg \frac{\varphi(z)Q_{2n}(z)}{z^n} = \mathrm{const}$ майже скрізь на $z = 1$ і як наслідок має місце рівність

$$\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} dt\Big| = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |Q_{2n}(e^{it})| dt.$$

Отже, враховуючи сказане вище, отримаємо

$$|\Phi(1) - U_n(\Phi, \Lambda, 1)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} Q_{2n}(e^{it}) dt\right| +$$

$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Q_{2n}(e^{it})| dt + O(1)(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)).$$

Оскільки $Q_{2n}(z)$ належить простору Харді, то до останнього інтегралу застосуємо нерівність Харді–Літтлвуда (Zygmund, 2002, с. 454). Отримаємо

$$|\Phi(1) - U_n(\Phi, \Lambda, 1)| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \frac{k}{n+1})|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k) - \psi(n+k+1)|}{k} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|\varrho_k|}{k} + O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k) - \psi(n+k+1)|}{k} +$$

$$+O(1)\Big(V_1^n((1-\Lambda)\psi) + B_1^n((1-\Lambda)\psi) + V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big).$$

Теорему доведено. □

Зауваження 2.2. У випадку, коли ψ_1, ψ_2 $(\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k), k = 0, 1, 2, \dots)$ є опуклими донизу функціями, як встановлено О. І. Степанцем (див., наприклад, [**??**, с. 27]) рівність (9) є асимптотично точною, тобто залишковий член має порядок менший від порядку головного члена. Асимптотично точною формула (9) буде, зокрема, і у випадку монотонно спадних до 0 послідовностей, тобто коли $\psi_1(k) \geqslant \psi_1(k+1)$,$\psi_2(k) \geqslant \psi_2(k+1)$ за умов $\lim \psi_1(k) = 0$, $\lim \psi_2(k) = 0$, $k \longrightarrow \infty$. Дійсно, тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\triangle\psi_1(k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \triangle\psi_1(k) = \psi_1(n+1)$$

та має місце оцінка (доведення див. (Zaderei, 1990, с. 102))

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi_1(k+n+1-l) - \triangle\psi_1(k+n+1+l)}{l} \right| \leqslant M\psi_1(n+1).$$

І аналогічно буде для ψ_2. Прикладами таких послідовностей є, наприклад: $\psi(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\left|\sin k\frac{\pi}{2}\right|$, (Zaderei, 1990, с. 104); чи $\triangle\psi(2^s) = \frac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k) = 0, k \neq 2^s$, $s = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\psi(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \triangle\psi(k)$ (Fomin, 1978, с. 217).

Умовам теореми задовольняють багато класичних середніх (Валле-Пуссена, Зигмунда тощо). Наведемо, наприклад, результат для середніх типу Валле-Пуссена $V_p^n(f, z)$:

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ 1 - \frac{k+p-n}{p+1}, & \text{при } n-p+1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Наслідок 2.3. *Нехай* $f \in H_\infty^\psi$, $n \in \mathbb{N}$, *дійсна та уявна частини послідовності* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *є монотонно спадними до* 0, $V_p^n(f, z) = \sum\limits_{k=0}^{n-p} a_k z^k + \sum\limits_{k=n-p+1}^{n} \Big(1 - \frac{k+p-n}{p+1}\Big) a_k z^k$ *— середні Валле-Пуссена. Тоді*

$$\sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f(z) - V_p^n(f, z)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{n} \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(|\psi(n-p+1)|).$$

Дійсно, мають місце наступні оцінки

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\triangle\psi_1(k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \triangle\psi_1(k) = \psi_1(n+1)$$

та (доведення див. (Zaderei, 1990, с. 102))

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi_1(k+n+1-l) - \triangle\psi_1(k+n+1+l)}{l} \right| \leqslant M\psi_1(n+1),$$

тому

$$V_1^n((1-\Lambda)\psi)+B_1^n((1-\Lambda)\psi)+V_n(\psi)+B_n(\psi)=O(|\psi(n-p+1)|).$$

Оскільки

$$\lambda_{n-k+1}^{(n)}=\begin{cases} 1, & \text{при } p+1\leqslant k\leqslant n+1,\\ \frac{k-2}{p+1}, & \text{при } 0\leqslant k\leqslant p,\end{cases}$$

тому остаточно отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|(1-\lambda_{n+1-k})\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1)|}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{|\psi(n+1-k)-\psi(n+k+1)-\frac{k-2}{p+1}\psi(n+1-k)|}{k}+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}=$$

$$=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}+O\Big(\sum_{k=1}^{p}\frac{|\sum_{n+1-k}^{n+k}\triangle\psi(\nu)|}{k}\Big)+O(|\psi(n-p+1)|)=$$

$$=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|\psi(n+k+1)|}{k}+O(|\psi(n-p+1)|).$$

Для сум Тейлора (Haevskyi & Zaderei, 2016), тобто, коли

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases} 1, & \text{при } 0\leqslant k\leqslant n-p,\\ 0, & \text{при } n-p+1\leqslant k\leqslant n,\end{cases}$$

будемо мати:

Наслідок 2.4. *Нехай $\psi(k)\in\mathbb{C}, k=0,1,2,\ldots$ — послідовність, для якої виконуються умови (3)–(5) та $|\psi(k)|\neq 0$. Тоді для довільної функції $f\in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справедливе співвідношення*

$$\sup_{f\in H_\infty^\psi}\|r_n(f,z)\|_\infty=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big),$$

де $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по n та f.

3 Висновки

Одержані асимптотичні рівності є поширенням на більш широкі класи функцій H_∞^ψ результатів робіт (Scheick, 1966; Savchuk et al., 2010; Savchuk, 2008). Це зумовлено тим, що на послідовність $\{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$ накладаються більш слабкі умови (умови Боаса–Теляковського), ніж у вище згаданих роботах.

References

Fomin, G. A. (1978). A class of trigonometric series. *Mathematical Notes*, *23*, 117–123.
https://doi.org/10.1007/BF01153150

Goluzin, G. M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable* (Vol. 26). Providence, RI: American Mathematical Society.

Haevskyi, M. V., & Zaderei, P. V. (2016). Approximation of analytic functions by partial sums of their Taylor series. *Ukrainian Mathematical Journal*, *67*(12), 1810–1830.
https://doi.org/10.1007/s11253-016-1192-7

Privalov, I. I. (1950). *Boundary properties of analytic functions [in Russian]* (2nd ed.). Moscow: Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit.

Savchuk, V. V. (2008). Approximation of 2π-periodic and holomorphic functions by some linear methods [in Ukrainian]. *Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*, *12*(5), 309–323.

Savchuk, V. V., Savchuk, M. V., & Chaichenko, S. O. (2010). Approximation of analytic functions by de la Vallée poussin sums. *Matematychni Studii*, *34*(2), 207–219.
http://matstud.org.ua/texts/2010/34_2/207-219.pdf

Scheick, J. T. (1966). Polynomial approximation of functions analytic in a disk. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *17*(6), 1238–1243.
https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1966-0206303-8

Shvetsova, A. M. (2000). Approximation by partial taylor sums and the best approximation for certain classes of functions by analytic functions in the unit polydisk [in Russian]. *Visnyk of Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, *475*(49), 208–217.

Stepanets, A. I. (2002). *Approximation theory methods [in Russian]*. Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine.

Telyakovskii, S. A. (1964). Integrability conditions for trigonometrical series and their application to the study of linear summation methods of Fourier series [in Russian]. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, *28*, 1209–1236.
http://www.mathnet.ru/links/e107f7dc3ecea04e62f0c2ef0b543847/im3051.pdf

Telyakovskii, S. A. (1967). Asymptotic estimate of the integral of the modulus of a function given by a series of sines [in Russian]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, *8*(6), 1416–1422.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN394039319_0008

Telyakovskii, S. A. (1971). An estimate of the norm of a function by its fourier coefficientsthat is suitable in problems of approximation theory [in Russian]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, *109*, 65–97.
http://www.mathnet.ru/links/80497a228da6c8f735f714d40ba309fe/

tm2982.pdf

Zaderei, P. V. (1990). On the deviation of $(\psi, \bar{\beta})$-differentiable periodic functions from the linear mean of their Fourier series [in Russian]. In *Theory of real functions: XXXIV semester in Banach center, 482, Preprint of Institute of mathematics Polish Academy of Sciences* (pp. 96–100).

Zygmund, A. (2002). *Trigonometric series* (3rd ed.). Cambridge, England: Cambridge university press.

М. А. Веремій, М. В. Гаєвський, П. В. Задерей (2018). Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування рядів Тейлора. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 33–46.

Submitted: 2018-11-10
Accepted: 2018-11-21

M. A. Veremii, M. V. Haevskyi, P. V. Zaderei (2018). Approximation of analytic functions by linear methods of summation of Taylor series. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 33–46.

Abstract. In this paper we find estimates for the deviation of polynomials generated by general linear methods of summation of Taylor series on the spaces of analytic functions H^{ψ}_{∞} (Kolmogorov–Nikolsky problem). These classes, generated by the sequence $\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}, \psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, are analogues of classes of differentiable functions, which were introduced by A. I. Stepanets. In the sequence $\{\psi_i(k)\}, i = 1, 2$, the Boas–Telyakovskii conditions are superimposed.

The deviation of polynomials is considered in a uniform metric.

Keywords: Taylor series; analytic functions; linear summation methods; spaces of functions; matrix of complex numbers.