Mathematics in Modern Technical University

Mathematics in Modern Technical University, 2018(1), 5–10
http://mmtu.matan.kpi.ua

Some comments on the paper "O jednom O-inverznom stavu" by Vojislav G. Avakumović

O. I. Klesov, J. G. Steinebach

Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Köln, Germany

klesov@matan.kpi.ua, jost@math.uni-koeln.de

Abstract

Some comments concerning the origin of the (R–O) notion for real functions are given, which has been used in the paper above, but was first introduced by Avakumović (1935). Moreover, some later extensions and generalizations of such functions are briefly discussed.

Keywords: regularly varying functions; ORV-functions; non-degenerate group of regular points; preserving the asymptotic equivalence.

MSC2010 26-03, 26A12, 26A48, 01A60, 01A61

UDC 517.51

Cite as: Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2018). Some comments on the paper "O jednom O-inverznom stavu" by Vojislav G. Avakumović. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 5–10.

There are two versions of the paper, namely (Avakumović, 1936a) in Serbo-Croatian, and (Avakumović, 1936b) in German. Both papers in §5 contain the following condition

$$h \leqslant \frac{\rho(\xi)}{\rho(t)} \leqslant H, \qquad 0 < t \leqslant \xi \leqslant \lambda t. \tag{R}$$

V. Avakumović mentions that condition (R) may succesfully change the assumption in Theorem O (which is the main result of (Avakumović, 1936a) and (Avakumović, 1936b)) that the function ρ is regularly varying.

Theorem. ***O***. *Let ρ be a regularly varying function. Assume that A is a function of bounded variation in every bounded interval and the integral*

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, dA(t)$$

exists for every $\sigma > 0$. If

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, dA(t) = O(1) \qquad \text{as} \quad \sigma \to 0$$

and

$$\frac{\rho(t')A(t') - \rho(t)A(t)}{\rho(t)} \geqslant -m(\lambda)$$

for some $\lambda > 1$ and all $0 < t < t' \leqslant \lambda t$, then

$$A(t) = O(1) \qquad \text{as} \quad t \to \infty.$$

Condition (R) above also appeared, as Condition (R–O), in an earlier note of (Avakumović, 1935). V. G. Avakumović himself, however, did not further investigate functions possessing this property in other works, so one may view (Avakumović, 1935) as an origin of the topic of (R–O) functions, later also called *O-regularly varying* (ORV) functions. It was Karamata (1936) who first studied properties of such functions in more detail, in fact, he returned to the notation (R–O) (instead of (R)) and introduced a different version of this condition (cf. (3) in Karamata, 1936, p. 210). Later Bojanic and Seneta (1971) continued the study of functions satisfying (R–O) (see also Seneta, 1976, Appendix A).

Nowadays the notation ORV (or simply OR) is mainly used in the literature for the class of functions satisfying (R–O) or (R), respectively. In view of the above history, however, the notions of *Avakumović functions* or *Avakumović–Karamata functions* could also be considered as appropriate names for this type of functions (see, e.g., Buldygin, Klesov, and Steinebach (2002, 2004)) (also see (Buldygin, Indlekofer, Klesov, & Steinebach, 2018)).

In the sequel we shall briefly mention some other developments, extensions and generalizations, which have been contributed to the theory of ORV functions by several authors. Bari and Stechkin (1956) and Matuszewska (1962), for example, obtained some related results without referring to the works of Avakumović or Karamata. More details on this are given in (Seneta, 1976) and (Bingham, Goldie, & Teugels, 1989).

Aljančić and Aranđelović (1977) made a step from (R) towards Karamata's (Karamata, 1936) form of the condition. Let

$$f_*(\lambda) = \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}, \quad f^*(\lambda) = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}, \quad \lambda > 0,$$

be the *lower* and *upper* limit functions for f. Among other results, it is shown in (Aljančić & Aranđelović, 1977) that, for measurable functions f, (R) is equivalent to the condition that

$$f^*(\lambda) < \infty \quad \text{for each} \quad \lambda > 0. \tag{C}$$

Then (R) is a kind of a *uniform convergence theorem* for ORV functions.

Feller (1969) used a *dominated variation* condition for *monotone* functions which turns out to be equivalent to (C). Such a dominated variation condition and some properties of the corresponding functions have also been studied in (Krasnosel'skii & Rutickii, 1961).

Some other related conditions have been introduced. For example, the class of *extended regularly varying* (ER) functions is characterized by the property that

$$\lambda^c \leqslant f_*(\lambda) \leqslant f^*(\lambda) \leqslant \lambda^d \quad \text{for each} \quad \lambda \geqslant 1$$

(confer, e.g., Bingham et al. (1989, Definition on p. 65), who also refer to Matuszewska (1965) for this notion).

An even wider class is given by Cline's (Cline, 1994) *intermediate regularly varying* (IR) functions satisfying

$$\lim_{\lambda\to 1} f_*(\lambda) = 1 \quad \text{or, equivalently,} \quad \lim_{\lambda\to 1} f^*(\lambda) = 1$$

(see also Buldygin, Klesov, and Steinebach (2002)). Obviously, the classes are nested, i.e., ER $\subset$ IR $\subset$ OR.

A natural generalization of the class of Avakumović functions has been presented in Buldygin, Klesov, and Steinebach (2004). Therein, a point λ is called *regular* for a function f defined on $(0, \infty)$, if the limit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

exists and is finite, and it is shown that the set of regular points is a multiplicative group. If this group is non-degenerate, i.e., if it contains at least one more $\lambda \neq 1$, then one can explicitly describe the limit functions f_* and f^* as well as obtain a characterization of such functions. Namely, the limit functions are of the form

$$f_*(\lambda) = \frac{\lambda^\rho}{P(-\log\lambda)} \quad \text{and} \quad f^*(\lambda) = \lambda^\rho P(\log\lambda), \quad \lambda > 0,$$

where $\rho \in \mathbb{R}$ and P is a periodic function being uniformly bounded away from 0 and ∞. Moreover, f can be represented as

$$f(x) = x^\rho s(x),$$

where s is a *O-slowly varying* (OSV) function such that $s^*(\lambda) = P(\log\lambda)$ (cf. Drasin and Seneta (1986) for the definition and properties of OSV functions).

References

Aljančić, S., & Aranđelović, D. (1977). O-regularly varying functions. *Publications de l'Institut mathematique*, *22*(42), 5–22.

Avakumović, V. G. (1935). Sur une extension de la condition de convergence des théoremes inverses de sommabilité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *200*, 1515–1517.

Avakumović, V. G. (1936a). O jednom O-inverznom stavu. *Rad Jugoslovenske Akademije Znatnosti i Umjetnosti (Rareda Matematičko–Prirodoslovnogo)*, *254*(79), 167–186.

Avakumović, V. G. (1936b). Über einer O-Inversionssatz. *Bull. Int. Acad. Youg. Sci.*, *29–30*, 107–117.

Bari, N. K., & Stechkin, S. B. (1956). Best approximations and differential properties of two conjugate functions [in Russian]. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, *5*, 483–522.

Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1989). *Regular variation* (Vol. 27). Cambridge: Cambridge university press.

Bojanic, R., & Seneta, E. (1971). Slowly varying functions and asymptotic relations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *34*(2), 302–315. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90114-4

Buldygin, V. V., Indlekofer, K.-H., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2018). *Pseudo regularly varying functions and generalized renewal processes*. Berlin: Springer.

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2002). Properties of a subclass of Avakumović functions and their generalized inverses. *Ukrainian Mathematical Journal*, *54*(2), 179–206. https://doi.org/10.1023/A:1020178327423

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2004). On factorization representations for Avakumović–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points. *Analysis Mathematica*, *30*(3), 161–192. https://doi.org/10.1023/B:ANAM.0000043309.79359.cc

Cline, D. B. H. (1994). Intermediate regular and Π variation. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *3*(3), 594–616.
https://doi.org/10.1112/plms/s3-68.3.594

Drasin, D., & Seneta, E. (1986). A generalization of slowly varying functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *96*(3), 470–472.
https://doi.org/10.2307/2046597

Feller, W. (1969). One-sided analogues of Karamata's regular variation. *L'Enseignement Math*, *15*, 107–121.
https://doi.org/10.5169/seals-43209

Karamata, J. (1936). Bemerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumović, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den Inversionssätzen vorkommen. *Bull. Int. Acad. Youg. Sci*, *29–30*, 117–123.

Krasnosel'skii, M. A., & Rutickii, Y. B. (1961). *Convex functions and Orlicz spaces.* Groningen: P. Noordhoff.

Matuszewska, W. (1962). Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces. *Studia Mathematica*, *21*(3), 317–344.
https://doi.org/10.4064/sm-24-3-271-279

Matuszewska, W. (1965). A remark on my paper "Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces". *Studia Mathematica*, *25*, 265–269.
https://doi.org/10.4064/sm-25-2-265-269

Seneta, E. (1976). *Regularly varying functions.* Berlin: Springer-Verlag.

O. I. Klesov, J. G. Steinebach (2018). Some comments on the paper "O jednom O-inverznom stavu" by Vojislav G. Avakumović. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 5–10.

Submitted: 2018-10-07
Accepted: 2018-11-14

О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах (2018). Кілька зауважень стосовно статті "Про одне O-зворотне твердження" Воїслава Авакумовича. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 5–10.

Анотація. Статтю присвячено розвитку ідеї правильно змінної зміни функцій дійсного аргументу. Особливу увагу приділено узагальненню цього поняття, яке вперше з'явилось у статті В. Авакумовіча в 1936 році сербсько-хорватською мовою. Зараз ця властивість позначається ORV або OR, хоча іноді використовується й оригінальне позначення R–O. Функції, які мають цю властивість, називаються функціями Авакумовича–Карамати. В статті прослiджено розвиток властивості ORV в статтях інших авторів, починаючи з роботи Й. Карамати, також опублікованій у 1936 році.

У XX сторіччі ця властивість досліджувалась здебільшого у зв'язку з конкретними застосуваннями у математичному аналізі або теорії ймовірностей (див., наприклад, Барі та Стєчкін (1956) або Феллер (1969), а також інші роботи у списку літератури). Пізніше з'явилися роботи, у яких властивість ORV використовувалась у теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії чисел, комплексному аналізі, функціональному аналізі тощо.

Разом з цим з'явилося розуміння, що ця властивість є надто загальною, а її часткові випадки також мають широке коло змістовних застосувань. Особливу увагу у другій частині статті приділено властивостям PRV та невиродженості групи регулярних точок, які автори досліджували разом з В. В. Булдигіним та К.-Х. Індлекофером, починаючи з 1999 року. Властивість невиродженості групи регулярних точок вирізняє з класу ORV ті функції, у яких границя Карамати існує для принаймні двох точок. Виявляється, що кожну з таких функцій можна зобразити як добуток певної функції Карамати на іншу логарифмічно періодичну функцію, тобто такі функції утворюють більш широкий клас, ніж правильно змінні функції Карамати.

Клас RV складається з тих функцій, які зберігають асимптотичну еквівалентність як послідовностей, так і функцій. Неявно таку властивість використовували раніше багато інших авторів, проте вони не помічали, що за нею прихована теорія, багата на результати внутрішнього характеру та на застосування. Детально властивості невиродженості групи регулярних точок та збереження асимптотичної еквівалентності викладено у монографії Булдигін, Індлекофер, Клесов та Штайнебах (2018).

Ключові слова: правильно змінні функції; ORV-функції; невироджена група регулярних точок; збереження асимптотичної еквівалентності.