Mathematics in Modern Technical University
ISSN 2664-4258

Mathematics in Modern Technical University, 2017(7), 777–788
10.20535/mmtu-2017.7-777

Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Ч. 1. Застосування методів елементарної математики та основних понять теорії границь числових послідовностей

В. О. Білий [a], О. Г. Білий [b]

[a] *КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*
[b] *Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

Анотація

Під час обчислення границь числових послідовностей та розв'язанні інших задач елементарної та вищої математики виникає проблема обчислення сум та добутків скінченної кількості чисел. У статті розглянуто деякі елементарні методи перетворень таких сум та добутків, зокрема: зведення до арифметичної або геометричної прогресії, метод математичної індукції, метод скорочення проміжних доданків або співмножників, згортання добутків, зведення до вже відомих сум та добутків.

Ключові слова: скінченна сума; скінченний добуток; границя числової послідовності; математична індукція; рекурентне співвідношення.

MSC2010 40-01

УДК 517.52

[b]belyi.oleksandr@gmail.com

Cite as: Bilyi, V. O. & Bilyi, O. G. (2017). Finding finite sums, products and limits of some numerical sequences. Part 1. Application of methods of elementary mathematics and basic concepts of the theory of limits of numerical sequences. *Mathematics in Modern Technical University, 2017*(7), 777–788. 10.20535/mmtu-2017.7-777

1 Метод зведення до арифметичної (а. п.) або геометричної (г. п.) прогресії

Приклад 1. Знайти $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$, де $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Розглянемо

$$S_n(x) - xS_n(x) =$$
$$= (1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}) - (x + 2x^2 + ... + (n-1)x^{n-1} + nx^n)$$

$$(1-x)S_n(x) = \underbrace{1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}}_{..} - nx^n = \frac{1 - {}^n}{1-x} - nx^n,$$

Звідки

$$S_n(x) = \frac{1 - {}^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}.$$

Приклад 2. Знайти $S_n = 7 + 77 + 777 + ... + \underbrace{7...7}_{n}$.

Розв'язання.

$$S_n = \tfrac{7}{9}\left(9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9...9}_{n}\right) =$$
$$= \tfrac{7}{9}\left((10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^n-1)\right) =$$

$$= \tfrac{7}{9}\left(\underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n}_{..} - n\right) =$$
$$= \tfrac{7}{9}\left(\tfrac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right) = \tfrac{7}{81}\left(10^{n+1} - 9n + 10\right).$$

Приклад 3. Знайти $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

Розв'язання. Розглянемо тотожність

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді можемо записати рівності

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Додамо всі ці рівності і після скорочень (використовуючи формулу суми а.п.), маємо:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\underbrace{\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right)}_{S_n^{(2)}} + 3\underbrace{\left(1 + 2 + 3 + ... + n\right)}_{..S_n^{(1)}} + n.$$

Звідки, після очевидних перетворень, маємо:

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}.$$

Зауваження. Аналогічно, із тотожності

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

отримаємо, знаючи $S_n^{(2)}$ та $S_n^{(1)}$:

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(S_n^{(1)}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2.$$

— дуже цікаву властивість натуральних чисел. Приклад 4. Знайти $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, де $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Фібоначчі, тобто

$$a_1 = a_2 = 1,$$

$$\underbrace{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}, \; n \geqslant 3, \; n \in \mathbb{N}.$$

$$\{a_n\}_1^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$$

. Розв'язання. Шукаємо

$$a_n = u_n + v_n = u_1 p^{n-1} + v_1 q^{n-1}$$

— сума двох різних геометричних прогресій: u_1, v_1 — їх перші члени, p, q — знаменники ($p \neq q$). Із умов

$$u_1 + v_1 = 1,$$

$$u_1 p + v_1 q = 1,$$

$$u_n + v_n = (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2}),$$

маємо

$$u_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}, v_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}, p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

тобто

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(q^n - p^n\right), 1 - q = p, 1 - p = q, pq = -1.$$

Тоді

$$S_n = 1 + 1 + a_3 + ... + a_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} p^k \right) =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-q^{n+1}}{p} - \tfrac{1-p^{n+1}}{q} \right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(q^{n+2} - p^{n+2}\right) - 1.$$

2 Метод математичної індукції

Приклад 1. Довести, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

. Доведення. 1. При $n = 1$ маємо правильну рівність

$$S_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+1}.$$

2. Нехай

$$S_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$$

. 3. Знайдемо

$$S_{n+1} = S_n + \operatorname{arctg} \tfrac{n}{2(n+1)^2} =$$
$$= \operatorname{arctg} \tfrac{n}{n+1} + \operatorname{arctg} \tfrac{n}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{2(n+1)^3}} =$$
$$= \operatorname{arctg} \tfrac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{(2n^2+2n+1)(n+2)} = \operatorname{arctg} \tfrac{n+1}{n+2}.$$

, Припущення вірно. Тепер неважко бачити, що

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

. Приклад 2. Довести, що

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2k-1} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{5} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n-3} \cdot \frac{2n}{2n-1} = 2^n$$

. Доведення. 1. При $n = 2$ маємо правильну рівність

$$P_2 = \frac{2+1}{1} \cdot \frac{2+2}{3} = 4 = 2^2.$$

2. Нехай, дійсно $P_n = 2^n$. 3. Знайдемо

$$\begin{gathered} P_{n+1} = \tfrac{n+1}{1} \cdot \tfrac{n+2}{3} \cdot \tfrac{n+3}{5} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2n+1}{2n-1} \cdot \tfrac{2(n+1)}{2n+1} = \\ = P_n \cdot \tfrac{(2n+1)2(n+1)}{(n+1)(2n+1)} = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}, \end{gathered}$$

припущення вірно. Приклад 3. Довести, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

. Доведення. 1. При $n = 1$, $S_1 = S_n = 1 \cdot 1! = (2)! - 1 = 1$ — вірно. 2. Нехай, дійсно $S_n = (n+1)! - 1$. 3. Знайдемо

$$\begin{gathered} S_{n+1} = S_n + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = \\ = (n+1)!((n+1)+1) - 1 = (n+2)! - 1. \end{gathered}$$

Рівність доведено. Приклад 4. Довести, що

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \ n \geqslant 2.$$

Доведення. 1. При $n = 2$, маємо правильну рівність

$$P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}.$$

2. Припустимо, що, дійсно

$$P_n = \frac{n+1}{2n}.$$

3. Обчислимо

$$P_{n+1} = P_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Ясно, що

$$\lim_{n\to\infty} \ P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3 Метод скорочення проміжних доданків або співмножників, згортання добутків

Приклад 1. Знайти

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо загальний член суми a_k і подамо його в такому вигляді:

$$a_k = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$

тоді

$$S_n = \left(\tfrac{1}{1^2} - \tfrac{1}{2^2}\right) + \left(\tfrac{1}{2^2} - \tfrac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ = 1 - \tfrac{1}{(n+1)^2} = \tfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

. Тепер

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1.$$

Приклад 2. Обчислити

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{2}{k^2}$$

. Розв'язання. Маємо

$$a_k = \operatorname{arctg} \frac{2}{k^2} = \operatorname{arctg} \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k^2-1)} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}(k-1),$$

тоді

$$S_n = (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0) + (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 1) + \ldots + \\ + (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n-1)) = \operatorname{arctg}(n+1).$$

. Звідси

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3. Знайти

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{2}{k^2+k}\right) = \ln P_n,$$

де $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k^2+k}\right)$. Розв'язання.

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \tfrac{k^2+k-2}{k^2+k} = \prod_{k=2}^{n} \tfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \\ = \tfrac{1\cdot4}{2\cdot3} \cdot \tfrac{2\cdot5}{3\cdot4} \cdot \tfrac{3\cdot6}{4\cdot5} \cdot \ldots \cdot \tfrac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n} \cdot \tfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \tfrac{n+2}{3n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3},$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1}{3} = -\ln 3.$$

Приклад 4. Обчислити

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо P_n на $2^n \sin\frac{x}{2^n}$ і скористаємось формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ та послідовно згорнемо добуток, маємо:

$$\begin{gathered} P_n = \tfrac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\left(2\cos\tfrac{x}{2}\cdot 2\cos\tfrac{x}{4}\cdot\ldots\cdot 2\cos\tfrac{x}{2^n}\sin\tfrac{x}{2^n}\right) = \\ = \tfrac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\left(2\cos\tfrac{x}{2}\cdot 2\cos\tfrac{x}{4}\cdot\ldots\cdot 2\cos\tfrac{x}{2^{n-1}}\sin\tfrac{x}{2^{n-1}}\right) = \ldots = \\ = \tfrac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} 2\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}. \end{gathered}$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sin x}{x}.$$

Приклад 5. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} P_n,$$

де

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Розв'язання.

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2} = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

де

$$\begin{gathered} a_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\tfrac{\pi}{4}, \\ a_2 = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\tfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\tfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \cos\tfrac{\pi}{8}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = \cos\tfrac{\pi}{2^{k+1}}. \end{gathered}$$

Підставляючи в попередній приклад $x = \frac{\pi}{2}$, маємо

$$\begin{gathered} P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\tfrac{\frac{\pi}{2}}{2^k} = \tfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}, \\ \lim_{n\to\infty} P_n = \tfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{\pi}. \end{gathered}$$

Приклад 6. Обчислити

$\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx.'.i\mathrm{S}_n$ на $2\sin\frac{x}{2}$ та скористаємось формулою

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

отримаємо:

$$\begin{gathered} S_n = \tfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin x\sin\tfrac{x}{2} + 2\sin 2x\sin\tfrac{x}{2} + ... + 2\sin\mathrm{n}\,x\sin\tfrac{x}{2}\right) = \\ = \tfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\tfrac{x}{2} - \cos\tfrac{3x}{2} + \cos\tfrac{3x}{2} - \cos\tfrac{5x}{2} + ...\right. \\ \left. ... + \cos\tfrac{(2n-1)x}{2} - \cos\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) = \tfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \\ = \tfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}. \end{gathered}$$

4 Метод застосування відомих або раніше знайдених сум та добутків, їхніх границь

Приклад 1. Розглянемо послідовність

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

. Із відомої нерівності

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

маємо нерівність

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

яка дає нам можливість зробити висновок, що a_n спадає і обмежене знизу, тобто за теоремою Вейєрштрасса вона має границю, позначимо її через C (постійна Ейлера). Тоді, за теоремою про представлення послідовності, що має границю, маємо:

$$\rho_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + C + \delta_n,$$

де δ_n — нескінченно мала послідовність. Тепер розглянемо послідовність

$$\begin{gathered} \sigma_n = \rho_{2n} - \rho_n = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + ... + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} = \\ = \ln 2n - \ln n + \omega_n = \ln 2 + \omega_n, \end{gathered}$$

де $\omega_n \to 0$. Ясно, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \ln 2$. Для послідовності, пов'язаної з Лейбніцем,

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^n\frac{1}{n}.$$

можемо записати таку рівність

$$S_{2n} = \rho_{2n} - 2\left(\tfrac{1}{2}\rho_n\right) =$$
$$= \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + ... + \tfrac{1}{2n}\right) - 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + ... + \tfrac{1}{2n}\right) =$$
$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + ... + \tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}\right).$$

Але $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \ln 2$$

. Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n$, де

$$Q_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + ... + x_n,$$

де x_n — будується за вказаним в перших доданках законом.

Розв'язання.

Запишемо

$$Q_n = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} +$$
$$+ \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12} + ... + x_n =$$

$$Q = \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + ... + b_n\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + ... + c_m\right),$$

звідки випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \frac{3}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{8},$$

де σ_n — послідовність із попереднього прикладу. Приклад 3. Знайти

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{2}{k(2k+1)}}.$$

. Розв'язання. Ясно, що

$$P_n = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k(2k+1)}} = e^{4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)}} = e^{4S_n},$$

де

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2k(2k+1)} = \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \tfrac{1}{2n\cdot(2n+1)} =$$
$$= \left| \tfrac{1}{2k\cdot(2k+1)} = \tfrac{(2k+1)-2k}{2k\cdot(2k+1)} = \tfrac{1}{2k} - \tfrac{1}{2k+1} \right| =$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + ... + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{2n+1} = \sigma_{2n+1}.$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{4\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n+1}} = e^{4\ln 2} = 16.$$

Приклад 4. Знайти $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$. Розв'язання. Маємо

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(4k^2-1)+1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(n + \frac{2n}{2(2n+1)}\right) = \frac{n}{4}\cdot\frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Приклад 5. Знайти $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.. Розв'язання.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = S_n^{(3)} + 3S_n^{(2)} + 2S_n^{(1)} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3, \\ S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}, \\ S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + 2\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left(n(n+1) + (4n+2) + 4\right) = \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2 + 5n + 6\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Ясно, що багато із приведених прикладів та інших розв'язуються не тільки вказаними методами, наприклад

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

простіше розв'язати методом математичної індукції. Крім того, очевидно, вказані методи не вичерпують всіх можливих. На закінчення розглянемо один дуже цікавий приклад знаходження суми членів числової послідовності, заданої певним рекурентним співвідношенням, де активно застосовуються властивості саме послідовності. Приклад 6. Розглянемо послідовність $\{x_n\}_1^\infty = \{1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34, ...\}$ — члени послідовності Фібоначчі на непарних місцях. Це теж поворотна послідовність другого порядку, рекурентне співвідношення для якої $x_{n+1} + x_{n-1} = 3x_n,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$, її характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, звідки

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Із умов

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = 2 \end{cases}$$

при $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, випливає

$$\begin{gathered} c_1 = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},\ \ c_2 = \tfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \\ x_n = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \tfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{gathered}$$

Тепер можна знайти $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ за формулами суми геометричної прогресії. Але нас цікавить інша сума, а саме $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{3x_k^2}$ та її границя. Для знаходження її, використаємо деякі властивості послідовності x_n, а саме: 1) $x_n(3x_{n-1}) = x_{n-1}(3x_n)$, звідки, застосовуючи рекурентне співвідношення, маємо

$$x_n(x_n + x_{n-2}) = x_{n-1}(x_{n+1} + x_{n-1}),$$

тобто

$$\begin{gathered} {x_n}^2 - x_{n-1}x_{n+1} = x_{n-1}^2 - x_n x_{n-2} = x_{n-2}^2 - x_{n-1}x_{n-3} = ... \\ = x_2^2 - x_3x_1 = 4 - 5 \cdot 1 = -1. \end{gathered}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3x_n^2} = -\operatorname{arctg} \frac{-1}{3x_n^2} =$

$$\begin{gathered} = -\operatorname{arctg} \tfrac{x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{x_n(x_{n+1}+x_{n-1})} = -\operatorname{arctg} \tfrac{\frac{x_n}{x_{n-1}} - \frac{x_{n+1}}{x_n}}{1+\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \\ = \operatorname{arctg} \tfrac{x_{n+1}}{x_n} - \operatorname{arctg} \tfrac{x_n}{x_{n-1}}. \end{gathered}$$

Використовуючи ці властивості, знайдемо

$$\begin{gathered} S_n = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{3x_1^2} + \left(\operatorname{arctg} \tfrac{x_3}{x_2} - \operatorname{arctg} \tfrac{x_2}{x_1}\right) + \left(\operatorname{arctg} \tfrac{x_4}{x_3} - \operatorname{arctg} \tfrac{x_3}{x_2}\right) + \\ + \left(\operatorname{arctg} \tfrac{x_5}{x_4} - \operatorname{arctg} \tfrac{x_4}{x_3}\right) + ... \end{gathered}$$

$$+\left(\operatorname{arctg}\tfrac{x_{n+1}}{x_n}-\operatorname{arctg}\tfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}-\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\tfrac{x_{n+1}}{x_n}=\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}\tfrac{x_{n+1}}{x_n}.$$

. Нарешті

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)=$$
$$=-\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\operatorname{arctg}\tfrac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Рекомендуємо читачу спробувати розв'язати приведені в роботі приклади, і не тільки їх, іншими методами, і не тільки розглянутими тут. Автори висловлюють щиру подяку професору Клесову О.І. за корисні обговорення даної роботи та мотивацію її виконання.

References

Alekseyev, V. M. (Ed.). (1977). *Selected assignments from the journal "American Mathematical Monthly" [in Russian].* Moscow: Mir.

Demidovich, B. P. (Ed.). (1970). *Problems in mathematical analysis.* Moscow: Mir Publishers.

Lyashko, I. I., Boyarchuk, A. K., Gai, Y. G., & Kalayda, A. F. (1983). *Mathematical analysis: Textbook [in Russian]* (Vol. 1). Kiev: Vyshcha Shkola.

В. О. Білий [a], О. Г. Білий [b] (2017). Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Ч. 1. Застосування методів елементарної математики та основних понять теорії границь числових послідовностей. *Mathematics in Modern Technical University, 2017*(7), 777–788.

Submitted: 2017-17-77
Accepted: 2017-17-77

V. O. Bilyi, O. G. Bilyi (2017). Finding finite sums, products and limits of some numerical sequences. Part 1. Application of methods of elementary mathematics and basic concepts of the theory of limits of numerical sequences. *Mathematics in Modern Technical University, 2017*(7), 777–788.

Abstract. When calculating the boundaries of numerical sequences and solving other problems of elementary and higher mathematics, there is a problem of calculating the sums and products of a finite number of numbers. The article considers some elementary methods of transformations of such sums and products, in particular: reduction to arithmetic or geometric progression, method of mathematical induction, method of reduction of intermediate terms or coefficients, reduction of products, reduction to already known sums and products.

Keywords: finite sum; finite product; limit of numerical sequence; mathematical induction, recurrent relation.