Mathematics in Modern Technical University

Mathematics in Modern Technical University, 2018(1), 101–116
http://mmtu.matan.kpi.ua

Про різні типи рівномірної збіжності функціональних рядів

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

victor144169@gmail.com, fedorova_lb@yahoo.com.ua

Анотація

Подано хронологію запровадження різних типів рівномірної збіжності функціональних рядів та властивостей рівномірно збіжних рядів у математичний аналіз. Указано зв'язки між різними типами рівномірної збіжності. Майже до кожного згаданого джерела подано гіперпосилання на його оцифрований варіант, що робить ефективним подальші дослідження історії функціональних рядів.

Ключові слова: функціональний ряд; рівномірна збіжність; правильна збіжність; історія математики.

MSC2010 01A55, 40-03, 40A30

УДК 51(091), 517.521

Cite as: Haidey, V. O., & Fedorova, L. B. (2018). On different types of uniform convergence of functional series. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 101–116.

1 Вступ

Цілеспрямоване оцифрування наукових періодичних видань, монографій та підручників уможливлює вивчати історію математики принаймні XIX та XX століть за першоджерелами.

За основу цієї оглядової статі покладено аналіз історії рівномірної збіжності в монографії Medvedev (1991). Його доповнено посиланнями на деякі сучасніші джерела та прямими посиланнями на оцифровані першоджерела.

Історію запровадження рівномірної збіжності в математичному аналізі розглянуто, зокрема у працях Pringsheim (1899), Hardy (1918), Rosenthal (1924, pp. 1137–1146), Grattan-Guinness (1970, pp. 112–123), монографіях Medvedev (1991), Viertel (2014).

2 Основні позначення та означення

Розгляд різних типів збіжності функціонального ряду, зручно проводити «кількома мовами», а саме в термінах збіжності власне ряду, збіжності послідовності його часткових сум та залишків ряду.

Нагадаємо, що *функціональним рядом* називають вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

членами якого є функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, означені на деякій множині $X \subset \mathbb{R}$.

Для функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ означують його: 1) *n-ту часткову суму*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

2) *n-й залишок*

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x);$$

3) *суму*

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), x \in D.$$

Кажуть, що функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається* (*розбігається*) в точці $x_0 \in X$, якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається (розбігається).

Множину всіх точок $x \in X$, у яких функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називають *областю збіжності* D цього ряду.

Область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ називають *областю абсолютної збіжності* ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

3 Різні типи збіжності функціонального ряду

Означення 3.1 ((P), поточкової збіжності)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається в кожній точці x області D, якщо

$$\forall x \in D : \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \Leftrightarrow \forall x \in D : \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

тобто

$$\forall x \in D \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N : |S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Означення 3.2 ((A), поточкової абсолютної збіжності)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається абсолютно в кожній точці x області D, якщо в кожній точці x області D збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Класифікацію 7 типів рівномірної збіжності та її узагальнень подано за статею Hardy (1918).

Означення 3.3 ((U_1), рівномірної збіжності на множині)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно в області D, якщо

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \;\; \forall x \in D \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \;\; \forall x \in D.$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in D : |S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Це найважливіший і найпоширеніший тип рівномірної збіжності, яким переважно й обмежуються в підручниках з математичного аналізу.

Далі, для спрощення, за множину D візьмімо відрізок $[a; b]$.

Означення 3.4 ((U_2), рівномірної збіжності в околі точки)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно в околі точки $c \in [a;b]$, якщо існує таке додатне число $\delta(c)$, що на $[c-\delta(c);c+\delta(c)]$ цей ряд збігається в розумінні (U_1) (якщо $c=a$, то на відрізку $[a;a+\delta(a)]$, а якщо $c=b$, то на відрізку $[b-\delta(b);b]$.

Означення 3.5 ((U_3), рівномірної збіжності в точці)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно в точці x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(x_0,\varepsilon) > 0, N(x_0,\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in [x_0-\delta;x_0+\delta] : |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Так само як означення $(U_1),(U_2)$ та (U_3), можна сформулювати означення $(V_1),(V_2)$ та V_3 (Hardy, 1918) відповідно узагальненої рівномірної збіжності на відрізку, в околі точки та в точці, у яких виконання умови $|R_n(x)| < \varepsilon$ вимагається не для всіх $n > N$, а для нескінченної кількості значень n, починаючи з деякого числа N, не обов'язково всіх.

Означення 3.6 ((Q), квазірівномірної збіжності на відрізку)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається квазірівномірно на відрізку $[a;b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і будь-якого номера N' відрізок $[a;b]$ можна покрити скінченною кількістю інтервалів

$$(a_1;b_1),(a_2;b_2),...,(a_k;b_k),$$

яким можна увідповіднити числа

$$n_1 > N', n_2 > N', ..., n_k > N'$$

так, щоб для всіх значень $x \in [a;b]$, які містяться в $(a_i;b_i)$ $(i=1,2,...,k)$, нерівність

$$|S(x) - S_{n_i}(x)| = |R_{n_i}(x)| < \varepsilon$$

виконувалась одночасно.

Означення 3.7 ((M), правильної збіжності на відрізку)**.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається правильно на відрізку $[a;b]$, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та $x \in [a;b]$ виконано нерівність

$$|u_n(x)| \leqslant a_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *мажорантою* ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

а правильно збіжний ряд ще називають *мажоровним.*

4 Зв'язки між різними типами рівномірної збіжності

1. Якщо ряд збігається абсолютно в кожній точці області D, то він збігається в кожній точці області D, тобто

$$(A) \Rightarrow (P).$$

2. Якщо ряд збігається рівномірно на деякій множині, то він збігається в кожній точці цієї множини, тобто

$$(U_1) \Rightarrow (P).$$

3. Правдиві також імплікації

$$(U_1) \Rightarrow (U_2) \Rightarrow (U_3).$$

Для збіжностей $(V_1), (V_2)$ та (V_3) такі імплікації неправдиві.

Якщо ряд збігається рівномірно в околі кожної точки (у розумінні (U_2)) з відрізка $[a; b]$, то він збігається й рівномірно на відрізку $[a; b]$ (у розумінні (U_1)).

З рівномірної збіжності в точці не випливає рівномірна збіжність в околі цієї точки.

З рівномірної збіжності в усіх точках відрізку випливає рівномірна збіжність на відрізку (доведення спирається на теорему Гайне —Бореля та аксіому Цермело).

З узагальненої рівномірної збіжності в усіх точках відрізка випливає, лише існування деякої підпослідовності натуральних чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ (з відповідного означення). Але з цього не випливає, що можна побудувати таку послідовність, яка була б придатна для всіх точок розглядуваної множини, як цього вимагає збіжність типу (V_1) (Medvedev, 1991).

5 Ознаки рівномірної збіжності рядів

Нагадаємо деякі ознаки рівномірної збіжності в розумінні (U_1).

Теорема 5.1. *(ознака Ваєрштраса). Якщо функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається правильно на відрізку* $[a; b]$, *то він збігається на цьому відрізку абсолютно й рівномірно.*

Отже,

$$(M) \Rightarrow (A) \cap (U_1).$$

Наслідок 5.2. *Якщо функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається правильно на відрізку* $[a;b]$, *то на цьому відрізку збігається рівномірно ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Теорема 5.3. *(ознака Діні). Якщо функції* $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, *неперервні й невід'ємні на відрізку* $[a;b]$ *й функціональний ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається до неперервної на відрізку* $[a;b]$ *функції* $S(x)$, *то він збігається на цьому відрізку рівномірно в розумінні* (U_1).

Нагадаємо також теореми про поточкову та рівномірну збіжність важливого випадку функціонального ряду — степеневого ряду.

Теорема 5.4. *(перша теорема Абеля). Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається в точці* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збігається для всіх значень* x, *які справджують нерівність* $|x| < |x_1|$. *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *у точці* x_2 *розбігається, то він розбігається для всіх значень* x, *які справджують нерівність* $|x| > |x_2|$.

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається всередині свого інтервалу збіжності $(-R;R), R > 0$ (він може вироджуватись в точку $x_0 = 0$ або «розширюватись» до $\mathbb{R}$.

Теорема 5.5. *(друга теорема Абеля). Степеневий ряд збігається абсолютно й рівномірно в розумінні* (U_1) *на будь-якому відрізку* $[-\rho;\rho] \subset (-R;R)$.

Наслідок 5.6. *(Fikhtengolz, 2009). Якщо степеневий ряд у точці* $x = R$ *розбігається, то збіжність ряду у проміжку* $[0;R)$ *не може бути рівномірною.*

Якщо степеневий ряд збігається в точці $x = R$, *то він збігається рівномірно на відрізку* $[0;R]$.

6 Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Неперервність суми ряду з неперервними членами.

Теорема 6.1. *Якщо функції* $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, *неперервні й функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно в розумінні* (U_1) *на відрізку* $[a;b]$, *то його сума* $S(x)$ *є неперервною функцією на цьому відрізку.*

Теорема 6.2 (Арцела). *Нехай функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, неперервні й функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається на відрізку $[a;b]$. Сума $S(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$ тоді й лише тоді, коли ряд збігається квазірівномірно (у розумінні (Q)) до функції $S(x)$ на цьому відрізку.*

2. Можливість почленного інтегрування ряду.

Теорема 6.3. *Якщо функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, неперервні й функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно в розумінні (U_1) на $[a;b]$, то його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[\alpha;t] \subset [a;b]$, тобто*

$$\int\limits_{\alpha}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{t} u_n(x)dx.$$

3. Можливість почленного диференціювання ряду.

Теорема 6.4. *Якщо функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, неперервно диференційовні й функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається на відрізку $[a;b]$, а функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно (в розумінні (U_1)) на $[a;b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати на $[a;b]$:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), x \in [a;b].$$

7 Історичні відомості

Сучасне означення суми ряду та його збіжності встановлюється після праць Больцано (Bolzano, 1817) та Коші (Cauchy, 1821).

1821 — Коші у своєму курсі «Алгебричного аналізу» (Cauchy, 1821, с. 123—124), публікує доведення помилкового твердження, що збіжний скрізь ряд неперервних функцій має неперервну суму.

1822 — Фур'є видає «Аналітичну теорії теплоти» (Fourier, 1822), де вже має приклади рядів неперервних функцій, які збігаються до розривних сум, але помилку Коші не зазначає.

1823 — Коші формулює ще одну помилкову теорему, що збіжний скрізь ряд неперервних функцій можна почленно інтегрувати (Cauchy, 1823, с. 157 —158).

1826 — Абель зауважує, що «теорема Коші [про неперервність суми] має винятки» (Abel, 1826, с. 316), і подає приклад ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n},$$

сума, якого має розриви в точках $x = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$.

У цій самій праці Абель, доводячи теорему 5.4, фактично доводить і теорему 5.5, відзначаючи властивість (U_1) степеневого ряду.

1838 — Ґудерман у трактаті, присвяченому еліптичним функціям (Gudermann, 1838), пише про «ряд, що збігається рівномірно», хоч і не подає ані означення, ані не використовує рівномірну збіжність у доведеннях.

1841—1842 — Ваєрштрас у працях, які були опубліковано тільки 1894 р. (Weierstrass, 1894a), (Weierstrass, 1894б), використовує властивість степеневих рядів (теорема 5.4) і говорить, що ряд «рівномірно» збігається, хоч і не дає власне означення рівномірної збіжності.

1846 — Б'єрлінґ у статті Björling (1897) формулює і доводить теорему про неперервність суми ряду з неперервними членами, розрізняючи збіжність «для будь-якого значення x» і «для будь-якого заданого значення x» (стаття вийшла латиною, переклад шведською був опублікований у Björling (1853).

1847 — Стокс (Stokes, 1847) розглядає рівномірну збіжність типу (V_2) (Stokes, 1847), описуючи її заперечення в термінах «нескінченно повільної збіжності», і намагається довести, що рівномірна збіжність необхідна й достатня для неперервності в розглядуваній точці суми ряду неперервних функцій, який збігається в околі цієї точки скрізь (достатність доведено правильно, а під час доведення необхідності припускає помилку). Повторює також помилку Коші, не зв'язуючи можливість почленного інтегрування рядів з рівномірною збіжністю. Стаття Стокса довго залишались непоміченою із приводу рівномірної збіжності.

1847 — Зайдель установлює факт нерівномірної збіжності ряду неперервних функцій в околах точок розриву суми ряду (Seidel, 1847) , описуючи її «як завгодно повільну збіжність» (заперечення рівномірної збіжності типу (U_2)). Зайдель доводить, що збіжності (U_2) достатньо для того, щоб сума функціонального ряду з неперервними членами була неперервна. Стаття Зайделя довго залишалася непоміченою (принаймні до 1870 року).

1853 — Коші виправляє свою помилку про неперервність суми ряду з неперервними членами (Cauchy, 1853), запроваджує рівномірну збіжність (U_1), але не термін для неї, і доводить, що сума рівномірно збіжного (у розумінні (U_1)) ряду неперервних функцій як дійсної, так і комплексної змінної є неперервною на відрізку або в області функцією. Ця стаття теж не стає широко відомою.

після 1857 — Ваєрштрас у своїх лекціях у Берлінському університеті поєднує термін «рівномірна збіжність» із означенням Коші (майже напевно він знав про статті Зайделя та Коші). Ваєрштрас указує на важливість рівномірної збіжності також і для можливості інтегрувати ряди почленно.

1866 — Томе вказує на зв'язок рівномірної збіжності (U_1) з почленним диференціюванням та інтегруванням (Thomé, 1866). Він доводить теорему, у якій рівномірну збіжність зв'язано із трьома важливими задачами аналізу — умовами неперервності суми ряду й почленних диференціювання та інтегрування, причому ці зв'язки названо «відомими» (Томе слухав Ваєрштрасові лекції).

1870 — Гайне запроваджує поняття рівномірної збіжності в тому самому вигляді (Heine, 1869), як і Коші, не посилаючись ні на кого (загалом у праці є згадки про внесок Ваєрштраса, статті Томе та Зайделя). Гайне зазначає необґрунтованість теореми про можливість почленного інтегрування скрізь збіжного тригонометричного ряду й доводить теорему про єдиність розвинення функції у тригонометричний ряд.

Гайне разом з рівномірною збіжністю ряду запроваджує поняття «узагалі рівномірно збіжного ряду», тобто ряду, який збігається на відрізку рівномірно, якщо з цього відрізку викинути довільні малі околи скінченної кількості точок. Основні свої теореми Гайне доводить саме для цієї узагальненої рівномірної збіжності; поводження ряду у критичних точках його не цікавить.

1870 — Кантор дає означення рівномірної збіжності у формі (U_1) з оцінкою залишку (Cantor, 1870). Формулює також загальнішу, ніж Гайне, теорему єдиності тригонометричного ряду, але доводить цю теорему лише у праці Cantor (1871).

1871 — Дюбуа-Реймон установлює одну достатню умову неперервності суми ряду неперервних функцій (du Bois-Reymond, 1871), напряму не зв'язану з рівномірною збіжністю (ряд з коефіцієнтів має збігатись абсолютно, а самі функції — члени ряду та його сума — бути обмеженими).

1874 — Дюбуа-Реймон дає негативну відповідь на питання, чи обов'язково ряд з неперервними членами збігається до неперервної суми рівномірно (du Bois-Reymond, 1874).

1874 — Штольц намагається довести (Stolz, 1875), що рівномірна збіжність є необхідною умовою для того, щоб сума ряду з неперервними членами була неперервною.

1875 — Дарбу в «Мемуарі про розривні функції» (Darboux, 1875) зазначає про свою обізнаність з роботами Томе, Гайне та Кантора, розглядає рівномірну збіжність типу (U_1) і чіткіше доводить, що рівномірно збіжний ряд неперервних функцій збігається до непрерервної функції. Дарбу також доводить, що рівномірно збіжний ряд інтегровних за Ріманом функцій можна почленно інтегрувати, тобто зінтегрований ряд збігається до інтеграла від суми ряду і слушно вказує на потребу рівномірної збіжності ряду з похідних для можливості почленного диференціювання.

На прикладі ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2[n^2 e^{-n^2x^2} - (n+1)^2 e^{-(n+1)^2x^2}] = x^2 e^{-x^2}$$

Дарбу показує, що умова рівномірної збіжності не є необхідною для неперервності суми ряду.

На прикладі ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}\right)$ Дарбу встановлює, що якщо умову рівномірної збіжності не виконано, то не можна почленно інтегрувати навіть збіжний до неперервної суми ряд неперервних функцій. У цьому прикладі інтеграл від суми існує, але він не рівний сумі ряду інтегралів від членів ряду.

1875 — Томе у праці Thomae (1875) незалежно від Дарбу доводить теорему про почленне інтегрування, користуючись рівномірною збіжністю типу (U_1).

1878 — Діні робить фундаментальний внесок у розроблення й застосування рівномірної збіжності (Dini, 1878). Він розглядає рівномірні збіжності типів $(U_1), (U_2), (U_3)$ та $(V_1), (V_2), (V_3)$.

Діні доводить для рядів з ***додатними*** членами еквівалентність збіжностей типу (U_1) та (V_1) і встановлює, що умова рівномірної збіжності ряду (U_1) є необхідною умовою того, що ряд з неперервними членами збігається до неперервної суми. Він установлює, що збіжність (V_2) достатня для неперервності ряду неперервних функцій в околі точки, а збіжність (V_1) достатня для неперервності суми на всьому інтервалі. Діні використовує рівномірну збіжність типу (U_2) (і її узагальнення) у теоремах про неперервність суми та почленне диференціювання та означує рівномірну збіжність типу (V_1), яку називає «простою рівномірною збіжністю».

Розглядаючи можливість почленного інтегрування ряду, Діні обмежується лише рядами, збіжними в розумінні (U_1). Він також зауважує, що з доведення теореми про можливість почленного інтегрування рівномірно збіжного в розумінні (U_1) ряду випливає, що якщо розглядуваний ряд збігається в розумінні (V_1), то його сума інтегровна. Питання про умову рівності суми інтегралів інтегралу від суми він залишає відкритим.

1880 — Ваєрштрас доводить у праці Weierstrass (1880), що якщо ряд збігається рівномірно в околі кожної точки, розташованої всередині або на межі заданої однозв'язної області, то він збігається рівномірно в усій області (тобто, що з рівномірної збіжності типу (U_2) в кожній точці замкненої області (а, отже, й відрізка) випливає рівномірна збіжність типу (U_1)).

1880 — Вольтера подає приклад ряду (Volterra, 1881), який на відрізку $[0; 1]$

збігається рівномірно в сенсі (V_1), але не в сенсі (U_1) :

$$u_{2n-1}(x) = x^{n+1}, u_{2n}(x) = -x^{n+1}, x \in [0;1),$$
$$u_n(1) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

1882 — Пінкерле узагальнює у праці Pincherle (1882) результат Ваєрштраса (1880), але вже для всієї площини.

1884 — Арцела запроваджує означення квазірівномірної збіжності типу (Q). (Arzelà, 1884a).

1887 — Дюбуа-Реймон у праці du Bois-Reymond (1887) під рівномірною збіжністю розуміє збіжність типу (U_3).

1894 — Принґсгайм використовує рівномірну збіжність типу (U_3) (Pringsheim, 1894).

1895 — Арцела одержав достатню ознаку можливості почленного інтегрування, зв'язану з обмеженістю в сукупності залишку ряду (Arzelà, 1884б).

1896 — Осґуд висловлює ідею розгляду рівномірної збіжності типу (U_3) (Osgood, 1897). Доводить, що ряд неперервних функцій збігається до неперервної суми, якщо залишок ряду обмежений у сукупності.

Розглядає приклад ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}),$$

у якому ряд з первісних збігається квазірівномірно, але інтеграл від суми не дорівнює сумі інтегралів.

1897 — Бендіксон, спираючись на книгу Dini (1878), показує (Bendixon, 1897), що існує клас рядів, які збігаються в сенсі (V_1), але не в сенсі (U_1) на відрізку. Будує приклад ряду неперервних функцій, який збігається до неперервної функції, але який не збігається в сенсі (V_1). Доводить теорему, що рівномірна збіжність типу (V_1) достатня для можливості почленного інтегрування за умови збіжності ряду інтегралів, і узагальнює на збіжність (V_1) теорему Дарбу — Діні про почленне диференціювання ряду, установлює також ознаки рівномірної збіжності (U_1) та (V_1) рядів.

1899 — Арцела із загальнішого погляду переглядає основні результати щодо збіжностей типів (U) та (V) (Arzelà, 1899). Зокрема, Арцела доводить, що якщо функціональний ряд збігається в сенсі (V_1), то можна так згрупувати його члени, не змінюючи порядку, що одержаний ряд збігатиметься рівномірно в сенсі (U_1).

Він доводить, що поняття квазірівномірної збіжності (Q) є необхідною й достатньо умовою того, щоб ряд з неперервними членами збігався до неперервної суми.

1903 — Гобсон незалежно доводить теорему Арцела про групування членів ряду (Hobson, 1904) і зауважує, що якщо кожен член ряду, який збігається в сенсі (U_1) замінити деякою сумою функцій, то одержаний ряд може бути й розбіжним; якщо ж він збігається скрізь, то він обов'язково збігається в розумінні (V_1).

1903 — Юнґ у статті Young (1904) означує рівномірну збіжність типу (U_3), розглядає однобічні збіжності (U_3) і запроваджує рівномірну збіжність на відрізку як рівномірну збіжність (U_3) в кожній точці цього відрізку. Він також доводить, що так означена рівномірна збіжність переходить у рівномірну збіжність типу (U_1) на відрізку (або на будь-якій замкненій множині). Юнґ також зауважує, що з рівномірної збіжності в точці не випливає рівномірна збіжність у будь-якому околі цієї точки ($(U_3) \not\Longrightarrow (U_2)$). Продовжив вивчення збіжності у статті Young (1908).

1905 — Борель запроваджує для збіжності типу термін «квазірівномірна» (Borel, 1905).

1908 — Ріс, не знаючи праць Принґсгайма та Юнґа, вивчає рівномірну збіжність типу (U_3) (Riesz, 1908).

1908 — Бер запроваджує поняття правильної збіжності (типу (M)) (Baire, 1908).

1917 — Ріс зауважує (Riesz, 1920), що рівномірну збіжність типу (U_3) розглядали до нього Юнґ та Принґсгайм, і підкреслює потребу розрізняти рівномірну збіжність типу (U_2) та (U_3).

8 Висновки

Дослідження історичного розвитку навіть одного математичного поняття нагадує нам усім, що історія математики сповнена драматизму. Це історія багатьох спроб, осяянь і помилок.

Автори розуміють, що у статті подано далеко не вичерпний огляд процесу усвідомлення та запровадження поняття "рівномірної збіжності". Бачиться цікавим і корисним зібрати з оригінальних джерел приклади і контрприклади на ознаки рівномірної збіжності та властивості рівномірно збіжних рядів.

Зазначимо також, що подальше оцифрування журналів та математичних монографій розширить можливості глибшого та точнішого вивчення історії математики.

References

Abel, N. H. (1826). Untersuchungen uber die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^2 ...$ u.s.w. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, *1*(4), 311–339.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0001

Arzelà, C. (1884a). Intorno alla continuità delle somma di infiniti funzioni continue. *Rendiconto della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, *19*, 79–84.

Arzelà, C. (1884b). Sulla integrazione per serie. *Atti della Reale Accademia dei Lincei: Rendiconti, Serie 4*, *1*, 532–537, 566–569.
https://www.biodiversitylibrary.org/page/44575233

Arzelà, C. (1899). Sulle serie di funzioni. *Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna: Serie 5*, *8*, 130–186, 701–744.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/120567

Baire, R. (1908). *Lecons sur les theories generales de l'analyse. (t. 2).* Paris: Gauthier-Villars.
https://archive.org/details/leonssurlesth02bairuoft

Bendixon, I. (1897). Sur la convergence uniforme des séries. *Öfversigt af Kongl. Vet-enskaps-akademiens forhandlingar*, *54*, 605–622.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/100535

Björling, E. G. (1853). Om oändliga serier, hvilkas termer äro continuerliga functioner af en reel variabel mellan ett par gränser, mellan hvilka serierna äro convergerande, öfvers. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-akademiens forhandlingar*, *10*, 147–160.
https://biodiversitylibrary.org/page/15957832

Björling, E. G. (1897). Doctrinae serierum infinitarum exercitationes. *Nova acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, *13*, 61–87, 143–187.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/100535

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.* Prague: Gottliebe Haase.
http://mdz-nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137646-7

Borel, E. (1905). *Leçons sur les fonctions variables rèelles et les dèveloppements en séries de polynomes.* Paris: Gauthier-Villars.
http://hdl.handle.net/10481/31387

Cantor, G. (1870). Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *72*, 139–142.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0072

Cantor, G. (1871). Über trigonometrische Reihen. *Mathematische Annalen*, *4*, 139–143.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0004

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique 1re partie: Analyse algébrique.* Paris: l'Imprimerie Royale.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t

Cauchy, A.-L. (1823). *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* (Vol. 1). Paris: l'Imprimerie Royale.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62404287

Cauchy, A.-L. (1853). Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des

fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus de L'Académie des Sciences*, *36*, 454–459.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2993z/f458.item.r=Cauchy

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa: Tipografia T. Nistri e C.
http://resolver.library.cornell.edu/math/1924876

du Bois-Reymond, P. (1871). Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend. *Mathematische Annalen*, *4*(1), 135–137.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0004

du Bois-Reymond, P. (1874). Beweis, dass die Koefficienten der trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$ die Werte $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha), a_p = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha, b_p = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$ haben, jedesmal wenn diese integrale endlich und bestimmt sind. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, *12*, 117–166.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/110172

du Bois-Reymond, P. (1887). Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *100*, 331–358.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0100

Fikhtengolz, G. M. (2009). *A course of differential and integral calculus [in Russian]* (Vol. 2). Moscow: Fizmatlit.

Fourier, J. B. (1822). *Théorie analytique de la chaleur.* Paris: Chez Firmin Didot, père et fils.
https://archive.org/details/thorieanalytiq00four

Grattan-Guinness, I. (1970). *The development of the foundation of mathematical analysis from Euler to Riemann.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Gudermann, C. (1838). Theorie der modular-functionen und der modular-integrale. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *18*, 1–54, 142–175, 220–258, 303–364.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0018

Hardy, G. H. (1918). Sir George Stokes and the concept of uniform convergence. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, *19*, 148–156.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/95836

Heine, E. (1869). Ueber trigonometrische Reihen. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, *71*, 353–365.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0071

Hobson, E. W. (1904). On modes of convergence of an infinite series of functions of a real variable. *Proceedings of the London Mathematical Society: Ser. 2*, *1*,

373–387.
https://doi.org/10.1112/plms/s2-1.1.285

Medvedev, F. A. (1991). *Scenes from the history of real functions.* Basel: Birkhauser Verlag.

Osgood, W. F. (1897). Non-uniform convergence and the integration of series term by term. *American Journal of Mathematics*, *19*, 155–190.
https://www.jstor.org/stable/pdf/2369589.pdf

Pincherle, S. (1882). Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche. *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Ser. 4*, *3*, 149–180.

Pringsheim, A. (1894). Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes fur Functionen einer reellen Variablen. *Mathematische Annalen*, *44*, 57–82.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0044

Pringsheim, A. (1899). Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre. In *Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Analysis, 2-1-1.* Leipzig: B. G. Teubner Verlag.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN36050616X

Riesz, F. (1908). Uber die Approximation einer Funktion durch Polynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *17*, 196–211.
https://www.digizeitschriften.de/download/PPN37721857X_0017

Riesz, F. (1920). Sur l'inegrale de Lebesgue. *Acta mathematica*, *20*, 191–205.
https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485887512

Rosenthal, A. (1924). Neuere Untersuchungen uber Funktionen reeller Veranderlichen in Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. In H. Burkhardt, W. Wirtinger, & E. H. R. Fricke (Eds.), *Enzyklopadie der mathematischen wissenschaften mit einschluss ihrer anwendungen. Bd. 2. Analysis* (pp. 851–1187). Leipzig: B. G. Teubner Verlag.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN360506542

Seidel, P. L. (1847). Note uber eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Funktionen darstellen. *Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften*, *5*, 381–394.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/42316

Stokes, G. G. (1847). On the critical values of the sums of periodic series. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, *8*, 533–583.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/49441

Stolz, O. (1875). Bemerkungen zur Integral-Rechnung. *Bericht des naturwissenshaftlichten und medizinischen Vereins in Insbruck*, *5*, 24–43.
https://www.zobodat.at/pdf/BERI_5_0024-0043.pdf

Thomae, J. (1875). *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.* Louis Nebert.
https://hdl.handle.net/2027/hvd.32044091890988

Thomé, L. W. (1866). Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gausschen Function

$f(a, 1, y, x)$. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, *66*, 322–336.
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0066

Viertel, K. (2014). *Geschichte der gleichmaßigen Konvergenz: Ursprunge und Entwicklungen des Begriffs in der Analysis des 19. Jahrhunderts.* Wiesbaden: Springer Spektrum.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-05939-2

Weierstrass, K. (1880). Zur Functionenlehre. *Monatsberichte der Koniglichen Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *1980*, 719–743.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/111870

Weierstrass, K. (1894a). Definition analytischer Functionen einer Veranderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen. In *Mathematische Werke* (Vol. 1, pp. 75–84). Berlin: Mayer & Muller.
https://archive.org/details/mathematischewer01weieuoft/page/74

Weierstrass, K. (1894b). Zur Theorie der Potenzreihen. In *Mathematische Werke (Bd. 1)* (Vol. 1, pp. 67–74). Berlin: Mayer & Muller.
https://archive.org/details/mathematischewer01weieuoft/page/66

Young, W. H. (1904). On non-uniform convergence and term-by-term integration of series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2-1*(1), 89–102.
https://doi.org/10.1112/plms/s2-1.1.89

Young, W. H. (1908). On uniform and non-uniform convergence and divergence of a series of continuous functions and the distinction of right and left. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2-6*(1), 29–51.
https://doi.org/10.1112/plms/s2-6.1.29

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова (2018). Про різні типи рівномірної збіжності функціональних рядів. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 101–116.

Submitted: 2018-10-10
Accepted: 2018-11-21

V. O. Haidey, L. B. Fedorova (2018). On different types of uniform convergence of functional series. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 101–116.

Abstract. A chronology of the introduction of various types of uniform convergence of functional series and properties of uniformly convergent series in mathematical analysis is presented. Relationships between different types of uniform convergence are indicated. Almost every source is referred to a hyperlink to its digitized version, which makes it possible to further investigate the history of functional series.

Keywords: functional series; uniform convergence; normal convergence; history of mathematics.