

## Застосування робастної оптимізації для лінійної моделі функціонування малого підприємства

І. В. Алексєєва, Т. І. Перевознюк

*Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,  
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

`alexir1@ukr.net`, `tatiana012494@gmail.com`

### Анотація

У статті розглянуто сучасний підхід до розв'язання лінійних оптимізаційних задач з невизначеностями. Він передбачає побудову робастного аналога вихідної детермінованої задачі. Залежно від множини невизначеностей, робастну оптимізаційну задачу зводять або до стандартної задачі лінійного програмування, або до складнішої нелінійної задачі.

З використанням робастної лінійної моделі, розв'язано задачу знаходження доходу малого підприємства для різних типів множини невизначеностей. Чисельна реалізація розв'язків виконана з використанням пакету прикладних програм Matlab.

**Ключові слова:** задача лінійної оптимізації, робастна оптимізація, робастний аналог, множина невизначеності.

**MSC2010** 90Cxx

**УДК** 519.863

# 1 Вступ

У багатьох прикладних задачах оптимізації параметри задач вважають точно відомими. Однак це рідко відбувається на практиці. Зазвичай реальні дані мають невизначеності через їх випадковий характер, неточність вимірювань та інші причини.

Існують різні підходи врахування невизначеностей у даних задачі. Так, після-оптимізаційний аналіз розв'язків дозволяє визначити можливі межі зміни параметрів обмежень і цільової функції задачі, за яких зберігається одержаний оптимальний план та виявити параметри, до змінення яких цей розв'язок є найбільш чутливим. У стохастичному програмуванні розробляють методики знаходження розв'язків оптимізаційних задач, що використовують знання законів розподілу ймовірностей для вхідних даних чи їх оцінок.

Останнім часом усе більшу популярність набирає методологія оптимізації при невизначеності в даних, яку називають *робастною оптимізацією*.

Уперше такий підхід до задач лінійного програмування запропонував Соyster (Soyster, 1973), який розглядав прості збурення в даних задачі й намагався перерформулювати початкову проблему для одержання розв'язку, допустимого при всіх невизначеностях у параметрах умов. Запропонована методика призводила до суттєвого погіршення отриманого значення цільової функції порівняно з оптимальним розв'язком детермінованого аналога задачі. Після майже 25-річного забуття, методика робастної оптимізації отримала продовження в роботах Бен-Тала, Немировського та Горяшка (Ben-Tal & Nemirovski, 1998, 2002; Goryashko & Nemirovski, 2014) яким, певною мірою, вдалося поєднати надійність і ефективність розв'язку. Нові підходи до описання геометрії області невизначеності запропоновано в роботах (Bertsimas & Sim, 2004), (Li, Ding, & Floudas, 2011) та (Li, Tang, & Floudas, 2012).

## 2 Поняття про робастну оптимізацію

Нехай задано задача лінійного програмування (ЗЛП)

$$\begin{aligned} \max_X C^T X \\ AX \leq B, \\ X \geq 0, \end{aligned}$$

де  $X \in \mathbb{R}^n$  — вектор змінних управління,  $C \in \mathbb{R}^n$  — вектор коефіцієнтів цільової функції,  $A = (a_{ij})$  — матриця обмежень,  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in J = \{1, \dots, n\}$ ,  $B \in \mathbb{R}^m$  — вектор правих частин системи обмежень.

Припускають, що параметри задачі можуть мати невизначеності, про розподіл ймовірностей яких певно невідомо. Задача полягає у знаходженні розв'язку «імунізованого» до помилок оцінок і мінливості вхідних даних.

**Означення 2.1.** *Невизначеною* задачею лінійного програмування (НЗЛП) називають множину ЗЛП загальної структури з різними даними, що належать заданій області невизначеності:

$$\left\{ \max_X \{C^T X : A(\xi) X \leq B, X \geq 0\} \right\}_{\xi \in U} \quad (1)$$

Фактично, це нескінченна множина детермінованих ЗЛП, для всіх реалізацій вектора параметрів  $\xi$  з деякої множини невизначеності  $U$ .

**Означення 2.2.** Вектор  $X \in \mathbb{R}^n$  називають *робастно допустимим* розв'язком НЗЛП, якщо він справджує всі реалізації обмежень із заданої області невизначеності, тобто

$$A(\xi) X \leq B, X \geq 0 \quad \forall \xi \in U.$$

**Означення 2.3.** *Робастним аналогом (robust counterpart)* НЗЛП (1) називають оптимізаційну задачу

$$\begin{aligned} & \max_X C^T X \\ & \max_{\xi \in U} A(\xi) X \leq B, \\ & X \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Завдання полягає у знаходженні робастно оптимального розв'язку задачі (2), тобто найбільш ефективного розв'язку для всіх можливих збурень значень вхідних параметрів.

Концепція робастності суттєво залежить від вигляду множини невизначеності  $U$ , від того якою мірою ми намагаємося охопити рівень захисту від збурення даних. У робастній постановці задачі припускають таке.

1. Нехай  $J_i$  — підмножина індексів  $i$ -го рядка, яка містить змінні індекси, відповідні коефіцієнти яких мають невизначеності. Кожний елемент  $a_{ij}$  в  $J_i$  матриці  $A$  стає випадковою величиною  $\tilde{a}_{ij}$  з симетричного і обмеженого інтервалу  $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}; a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ , де  $a_{ij}$  — номінальне значення,  $\hat{a}_{ij} > 0$  — збурення  $a_{ij}$ .

2. Покладаємо  $\xi_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$ , що відповідає невідомому розподілу ймовірностей і набуває значень в  $[-1; 1]$ . Тоді можна записати  $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij} \hat{a}_{ij}$ .

Отже, з (2) маємо

$$\max_X \sum_j c_j x_j \quad (3)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leq b_i \quad \forall i \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \quad (5)$$

Робастна оптимізаційна задача є дворівневою і суттєво залежить від геометрії множини невизначеності. Складність розв'язання такої проблеми пов'язана з наявністю внутрішньої екстремальної задачі щодо вектору збурень  $\xi$ , що в загальному випадку не гарантує опуклості області допустимих розв'язків (4), (5).

### 3 Геометрія області невизначеності

Для опису множини невизначеностей застосовують метрику

$$\|\xi\|_p = \left( \sum_{j \in J_i} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

для  $p = 1, 2, \infty$ .

#### 3.1 «Коробка» (Box representation, Soyster (1973))

Множину невизначеностей описують з використанням  $\infty$ -норми невизначеного вектора даних  $\xi$  так:

$$U_\infty = \{\xi \mid \|\xi\|_\infty \leq \Psi\} = \{\xi \mid |\xi_j| \leq \Psi \quad \forall j \in J_i\}$$

де  $\Psi$  — регульований параметр (бюджет невизначеності), що контролює розмір заданої невизначеності.

$$\max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : |\xi_j| \leq \Psi \quad \forall j \in J_i \right\} = \Psi \sum_{j \in J_i} |\hat{a}_{ij} x_j| = \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j|.$$

Тобто задача (3)–(5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \max_X \sum_j c_j x_j \\ & \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j. \end{aligned}$$

Зауважимо, якщо умова

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

відсутня, то умова

$$\sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \leq b_i \quad \forall i$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}u_j \leq b_i & \forall i, \\ -u_j \leq x_j \leq u_j, \\ u_j \geq 0 & \forall j \in J_i. \end{cases}$$

Вибір такої множини невизначеностей забезпечує максимально можливий рівень захисту і припускає, що всі параметри можуть досягати своїх найгірших можливих значень (найгірший випадок сценарію). Перевагою такого підходу є простота розв’язання, оскільки робастна оптимізаційна задача зводиться до звичайної задачі лінійного програмування. Недоліком методу є високий рівень консерватизму, тому можливе суттєве погіршення значення цільової функції. Графічна ілюстрація для випадку одного балансового рівняння із двома змінними на рис. 1.

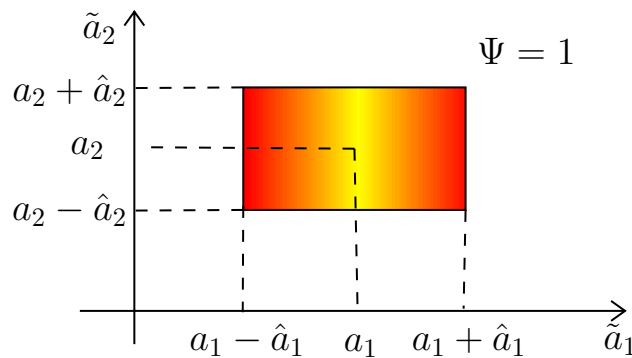


Рис. 1:

### 3.2 Еліпсоїдальна область (Ellipsoidal set, Ben-Tal & Nemirovski (1998))

Еліпсоїдальну область невизначеності задають з використанням 2-норми невизначеного вектора даних  $\xi$ :

$$U_2 = \{ \xi \mid \|\xi\|_2 \leq \Omega \} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\},$$

де  $\Omega$  — бюджет невизначеності, який контролює розмір невизначеної множини.

Якщо  $\Omega \geq \sqrt{|J_i|}$ , де  $|J_i|$  — потужність множини  $J_i$ , то весь невизначений простір покривається еліпсоїдальною множиною  $U_2$ .

$$\begin{aligned}
& \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} = \\
& = \max_{\xi \in U} \left\{ \sqrt{\left( \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right)^2} : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} = \\
& = \max_{\xi \in U} \left\{ \sqrt{\left( \sum_{j \in J_i} \xi_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j \in J_i} (\hat{a}_{ij} x_j)^2 \right)} : \sum_{j \in J_i} \xi_j^2 \leq \Omega^2 \right\} = \\
& = \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}
\end{aligned}$$

Задача (3)–(5) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \max_X \sum_j c_j x_j \\
& \sum_j a_{ij} x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i \quad \forall i \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j
\end{aligned}$$

Основна ідея застосування еліпсоїдальної області полягає в тому, що кутові значення навряд чи відбудуться, що дозволяє певною мірою поєднувати надійність і ефективність розв'язку.

Недоліком методу є перетворення ЗЛП у складніший робастний аналог — нелінійну задачу математичного програмування (SOCP — second order conic programming).

Графічна ілюстрація для одного балансового рівняння з двома змінними на рис. 2.

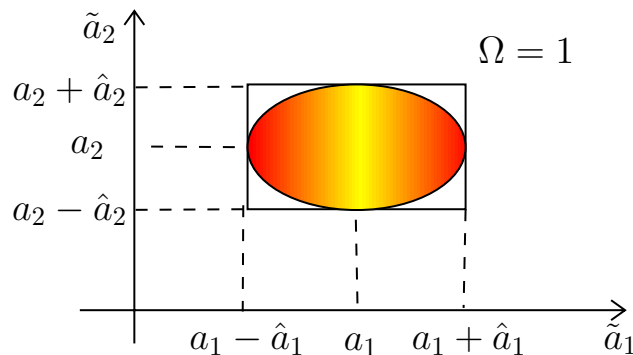


Рис. 2:

### 3.3 Поліедральна множина (Polyhedral set, Bertsimas & Sim, 2004)

Множина невизначеностей задається 1-нормою невизначеного вектора даних  $\xi$ :

$$U_1 = \{\xi \mid \|\xi\|_1 \leq \Gamma\} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\},$$

де параметр  $\Gamma$  визначає бюджет невизначеності. Якщо  $\Gamma \geq |J_i|$ , то загальний невизначений простір покривається багатогранною множиною.

$$\max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j : \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma \right\} = \{\Gamma p_i, p_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j|\}.$$

Тобто для задачі (3)–(5) маємо:

$$\begin{aligned} & \max_x \sum_j c_j x_j \\ & \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leq b_i \quad \forall i \\ & p_i \geq \hat{a}_{ij} x_j \quad \forall j \in J_i \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Розв’язання робастної оптимізаційної задачі зводять до розв’язання стандартної задачі лінійного програмування, але суттєво більшої розмірності.

Запровадження поліедральної множини невизначеності дозволяє контролювати консерватизм, зберігаючи при цьому обчислювальні можливості.

Графічна ілюстрація поліедральної множини невизначеності для двох змінних зображена на рис. 3.

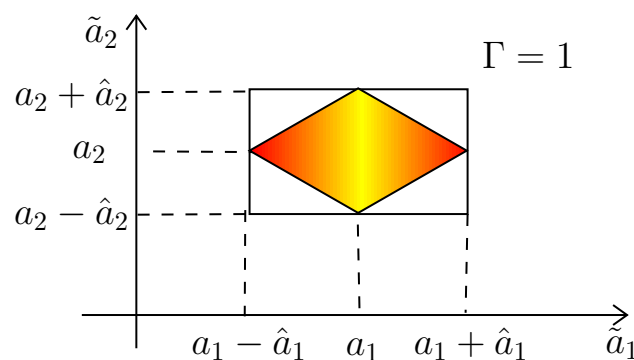


Рис. 3:

## 4 Розв'язання задачі оптимізації доходу малого підприємства

Розгляньмо задачу максимізації доходу малого підприємства на основі лінійної моделі його функціонування. Припускаємо, що основним ресурсом такого підприємства є персонал, тому основним ресурсним обмеженням буде робочий час працівників. Для побудови моделі вважаємо, що кількість працівників підприємства дорівнює 10. На основі вимог, визначених в КЗпП, норма тривалості робочого часу на 2018 рік становить 1993 години. Керуючими змінними моделі —  $x_j$ ,  $j = \overline{1, 12}$  вважаємо типи проектів, замовлення на які може отримати підприємство. Матриця обмежень  $A = (a_{ij})$ , де  $a_{ij}$  — час на виконання  $i$ -м працівником  $j$ -го завдання. Додатково накладаємо певні умови, пов'язані з попередніми замовленнями й маркетинговими дослідженнями ринку. На основі складеної технологічної таблиці будуємо модель задачі:

$$F(X) = 2800x_1 + 2500x_2 + 5600x_3 + 5500x_4 + 13800x_5 + 27000x_6 + \quad (6)$$

$$+ 12700x_7 + 15100x_8 + 13500x_9 + 29400x_{10} + 25600x_{11} \rightarrow \max \quad (7)$$

$$(8)$$

$$80x_1 + 48x_2 + 88x_4 + 16x_8 + 40x_9 + 100x_{10} + 200x_{11} + 8x_{12} \leq 1993; \quad (9)$$

$$48x_1 + 84x_3 + 40x_5 + 168x_6 + 32x_7 + 20x_8 + 100x_{10} \leq 1993; \quad (10)$$

$$40x_2 + 88x_3 + 200x_9 + 480x_{11} \leq 1993; \quad (11)$$

$$36x_1 + 84x_4 + 80x_5 + 200x_7 + 496x_{10} \leq 1993; \quad (12)$$

$$(13)$$

$$40x_2 + 80x_4 + 400x_6 + 168x_8 \leq 1993; \quad (14)$$

$$48x_2 + 80x_3 + 240x_7 + 488x_{11} \leq 1993; \quad (15)$$

$$88x_4 + 80x_8 + 280x_9 + 420x_{10} \leq 1993; \quad (16)$$

$$56x_1 + 80x_5 + 460x_6 + 240x_7 + 80x_{12} \leq 1993; \quad (17)$$

$$(18)$$

$$120x_5 + 320x_6 + 200x_9 + 400x_{11} + 160x_{12} \leq 1993; \quad (19)$$

$$60x_3 + 200x_5 + 280x_8 + 280x_{10} \leq 1993; \quad (20)$$

$$(21)$$

$$15 \leq x_1 + x_2 \leq 30;$$

$$10 \leq x_4 + x_5 \leq 25;$$



$$x_{12} \geq 0.05 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \quad (22)$$

$$x_{12} \leq 0.1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}); \quad (23)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 12}. \quad (24)$$

$$(25)$$

Уважаємо, що параметри матриці обмежень задачі точно не визначені й можуть змінюватись у межах 20% від своїх номінальних значень. Припускаємо, що праві частини балансових співвідношень є жорсткими і порушувати їх не можна.

Розв'язуємо низку задач для множин невизначеності різної геометрії з параметрами, що контролюють розмір невизначеності.

Отримані числові значення цільової функції для кожного методу розв'язання ( $FB$ ,  $FE$ ,  $FP$  — цільові функції для прямокутного представлення, еліпсоїдальної і поліедральної множин відповідно) і ступінь їх відхилення від значень для детермінованої задачі наведено в таблиці 1.

Значення параметрів  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\Gamma = 0$  відповідають розв'язку початкової детермінованої задачі.

Табл. 1:

$\Psi$	$FB$	%	$\Omega$	$FE$	%	$\Gamma$	$FP$	%
0	355680	0	0	355680	0	0	355680	0
0,2	348550	2	0,2	352030	1,02	0,2	353230	0,67
0,4	341690	3,93	0,4	348460	2,03	0,4	350820	1,37
0,6	335100	5,78	0,6	344960	3,01	0,6	348470	2,03
0,8	328740	7,56	0,8	341530	3,98	0,8	346160	2,68
1	322620	9,29	1	338160	4,93	1	343910	3,31
1,2	316710	10,95	1,2	334850	5,86	1,2	341700	3,93
1,4	311020	12,56	1,4	331590	6,77	1,4	339530	4,54
1,6	305520	14,1	1,6	328390	7,67	1,6	337350	5,15
1,8	300200	15,6	1,8	325305	8,53	1,8	335140	5,77
2	295060	17,04	2	322120	9,44	2	332940	6,39

За отриманими числовими розв'язками побудовано графіки залежностей значень цільової функції від розміру бюджету невизначеності (рис. 4).

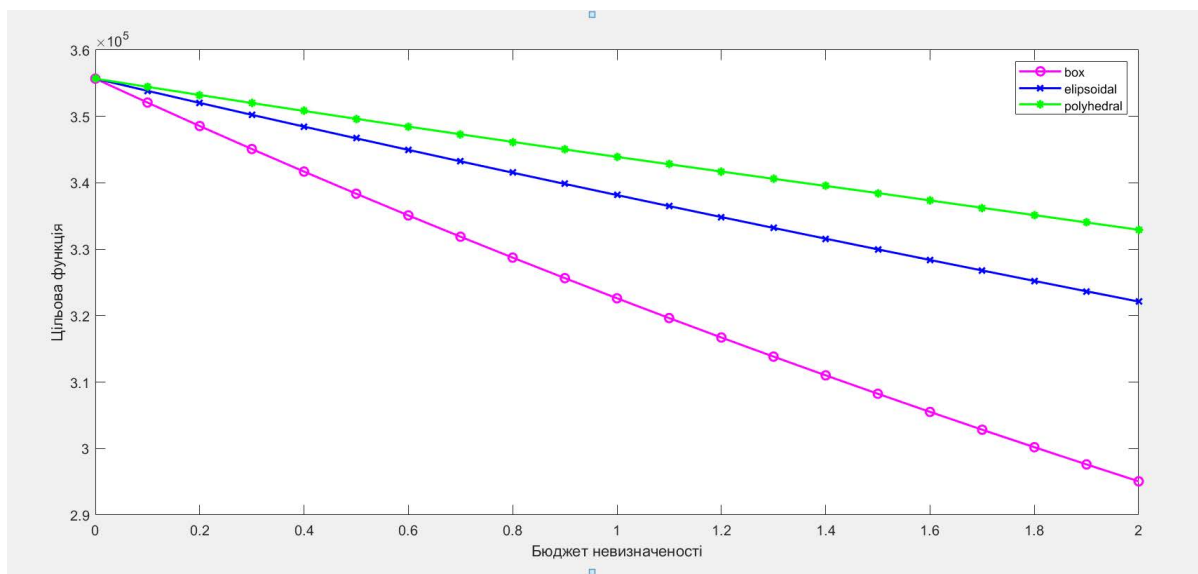


Рис. 4:

Числові розв'язки задачі отримано з застосуванням системи Matlab, M-файли і програму для випадку еліпсоїдальної множини невизначеності наведено в додатку.

## 5 Висновок

У статті розглянуто задачу знаходження економічних показників малого підприємства на основі робастної лінійної моделі. Аналіз розв'язку дозволяє спрогнозувати розвиток підприємства у припущенні, що вхідні параметри задачі можуть мати невизначеності, закони розподілу ймовірностей яких невідомі. Для розглянутої задачі найкращі показники отримали для поліедральної множини невизначеності — відхилення від розв'язку початкової детермінованої задачі не перевищило 6,5% при можливих збуреннях даних в межах 20%. Але, хоча робастна задача для такої області звелась до стандартної ЗЛП, кількість змінних збільшилась з 12 до 22, а кількість обмежень — з 16 до 66.

## 6 Додаток. M-файл задачі

```
% Еліпсоїдальна множина невизначеності
% Цільова функція
function fe1= myfunel(x)
```

```

fe1=-2800*x(1)-2500*x(2)-5600*x(3)-5500*x(4)-13800*x(5)
    -27000*x(6)-12700*x(7)-15100*x(8)-13500*x(9)-29400*x(10)
    -25600*x(11);
% Система обмежень (еліпсоїдальна область)
function [c, ceq]=mysone1(x, W)
c(1)=80*x(1)+48*x(2)+88*x(4)+16*x(8)+40*x(9)+100*x(10)
    +200*x(11)+8*x(12)+W*sqrt(8^2*x(1)^2+4.8^2*x(2)^2+8.8^2*
    x(4)^2+1.6^2*x(8)^2+4^2*x(9)^2+10^2*x(10)^2+20^2*x(11)
    ^2+0.8^2*x(12)^2)-1993;
c(2)=48*x(1)+84*x(3)+40*x(5)+168*x(6)+32*x(7)+20*x(8)+100*
    x(10)+W*sqrt(4.8^2*x(1)^2+8.4^2*x(3)^2+4^2*x(5)
    ^2+16.8^2*x(6)^2+3.2^2*x(7)^2+2^2*x(8)^2+10^2*x(10)^2)
    -1993;
c(3)=40*x(2)+88*x(3)+200*x(9)+480*x(11)+W*sqrt(4^2*x(2)
    ^2+8.8^2*x(3)^2+20^2*x(9)^2+48^2*x(11)^2)-1993;
c(4)=36*x(1)+84*x(4)+80*x(5)+200*x(7)+496*x(10)+W*sqrt
    (3.6^2*x(1)^2+8.4^2*x(4)^2+8^2*x(5)^2+20^2*x(7)
    ^2+49.6^2*x(10)^2)-1993;
c(5)=40*x(2)+80*x(4)+400*x(6)+168*x(8)+W*sqrt(4^2*x(2)
    ^2+8^2*x(4)^2+40^2*x(6)^2+16.8^2*x(8)^2)-1993;
c(6)=48*x(2)+80*x(3)+240*x(7)+488*x(11)+W*sqrt(4.8^2*x(2)
    ^2+8^2*x(3)^2+24^2*x(7)^2+48.8^2*x(11)^2)-1993;
c(7)=88*x(4)+80*x(8)+280*x(9)+420*x(10)+W*sqrt(8.8^2*x(4)
    ^2+8^2*x(8)^2+28^2*x(9)^2+42^2*x(10)^2)-1993;
c(8)=56*x(1)+80*x(5)+460*x(6)+240*x(7)+80*x(12)+W*sqrt
    (5.6^2*x(1)^2+8^2*x(5)^2+46^2*x(6)^2+24^2*x(7)^2+8^2*x
    (12)^2)-1993;
c(9)=120*x(5)+320*x(6)+200*x(9)+400*x(11)+160*x(12)+W*sqrt
    (12^2*x(5)^2+32^2*x(6)^2+20^2*x(9)^2+40^2*x(11)^2+16^2*x
    (12)^2)-1993;
c(10)=60*x(3)+200*x(5)+280*x(8)+280*x(10)+W*sqrt(6^2*x(3)
    ^2+20^2*x(5)^2+28^2*x(8)^2+28^2*x(10)^2)-1993;
c(11)=-x(1)-x(2)+15;
c(12)=x(1)+x(2)-30;
c(13)=-x(4)-x(5)+10;
c(14)=x(4)+x(5)-25;
c(15)=-0.1*x(1)-0.1*x(2)-0.1*x(3)-0.1*x(4)-0.1*x(5)-0.1*x
    (6)-0.1*x(7)-0.1*x(8)-0.1*x(9)-0.1*x(10)-0.1*x(11)+x(12)
    ;
c(16)=0.05*x(1)+0.05*x(2)+0.05*x(3)+0.05*x(4)+0.05*x(5)
    +0.05*x(6)+0.05*x(7)+0.05*x(8)+0.05*x(9)+0.05*x(10)

```

```
+0.05*x(11) - x(12);  
ceq=[];  
% Програма для функції fmincon  
K=1  
for W=0:0.1:2  
[x, fe1, flag]=fmincon(@myfun1,[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1  
0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1],[],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0 0 0  
0 0 0],[],@(x)mycone1(x, W))  
WW(K)=W;  
FE(K)=-fe1;  
K=K+1;  
end.
```

## References

- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of operations research*, 23(4), 769–805.  
<https://doi.org/10.1287/moor.23.4.769>
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2002). Robust optimization—methodology and applications. *Mathematical Programming*, 92(3), 453–480.  
<https://doi.org/10.1007/s101070100286>
- Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35–53.  
<https://doi.org/10.1287/opre.1030.0065>
- Goryashko, A. P., & Nemirovski, A. S. (2014). Robust energy cost optimization of water distribution system with uncertain demand. *Automation and Remote Control*, 75(10), 1754–1769.  
<https://doi.org/10.1134/S000511791410004X>
- Li, Z., Ding, R., & Floudas, C. A. (2011). A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: I. robust linear optimization and robust mixed integer linear optimization. *Industrial & engineering chemistry research*, 50(18), 10567–10603.  
<https://doi.org/10.1021/ie200150p>
- Li, Z., Tang, Q., & Floudas, C. A. (2012). A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: II. Probabilistic guarantees on constraint satisfaction. *Industrial & engineering chemistry research*, 51(19), 6769–6788.  
<https://doi.org/10.1021/ie201651s>
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, 21(5), 1154–1157.  
<https://doi.org/10.1287/opre.21.5.1154>
-

І. В. Алексєєва, Т. І. Перевознюк (2018). Застосування робастної оптимізації для лінійної моделі функціонування малого підприємства. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 61–73.

*Submitted: 2018-10-03*

*Accepted: 2018-11-07*

I. V. Aliksieieva, T. I. Perevozniuk (2018). Application of robust optimization for a linear model of operation of a small enterprise. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 61–73.

**Abstract.** In this paper the modern approach of solving linear optimization problems with uncertainty is presented. It involves the construction of a robust counterpart of the initial deterministic problem.

Depending on the uncertainty sets, a robust optimization problem is brought either to a standard linear programming problem, or to a more complex nonlinear problem. Using the robust linear model, the problem of finding the income of a small enterprise for various types of uncertainty sets is solved. Numerical realization of solutions is made using the package of Matlab applications.

**Keywords:** linear optimization problem, robust optimization, robust counterpart, uncertainty set.