**Mathematics in Modern Technical University**

*Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 55–60
http://mmtu.matan.kpi.ua

# Узагальнення понять числового ряду та нескінченного добутку

В. Юськович

*Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

viktyusk@gmail.com

**Анотація**

Метою даної статті є узагальнення понять числового ряду, нескінченного добутку та їхньої збіжності шляхом запровадження поняття *нескінченної операції*, визначеної в довільному метричному просторі та для довільної бінарної операції.

Основний результат статті — доведення загальної необхідної ознаки збіжності нескінченної операції.

**Ключові слова:** бінарна операція; метричний простір; збіжність.
**MSC2010** 40A05
**УДК** 517.521+517.523

Cite as: Yuskovych, V. (2018). Generalization of the notions of a numerical series and infinite product. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 55–60.

# 1 Означення та приклади нескінченних операцій

Сформулюємо означення нескінченної операції та подамо деякі важливі приклади.

**Означення 1.1.** Нехай $* : G^2 \to G$ — бінарна операція (Kurosh, 1972), $(G,\ d)$ — метричний простір (Kolmogorov & Fomin, 1957).

*Частковою* операцією елементів $(a_k)_{k=0}^n \in G^{n+1}$ назвімо елемент

$$s_n = a_0 * a_1 * \ldots * a_n.$$

*Нескінченною* операцією елементів $(a_n)_{n=0}^\infty \in G^\infty$ назвімо границю

$$\mathop{*}_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

(у сенсі метричного простору). Якщо ця границя існує, говоритимемо, що нескінченна операція *збігається* (*збіжна*); інакше — *розбігається* (*розбіжна*).

*Приклад* 1.2 (числовий ряд). Розгляньмо множину $G = \mathbb{R}$ з евклідовою метрикою $d$ та операцію суми $* := +$. Тоді $+_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. тобто в цьому випадку поняття нескінченної операції збігається з поняттям числового ряду (Ilin & Poznyak, 2005), причому збіжність обох понять узгоджена.

□ Справді, $+ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — бінарна операція, $(\mathbb{R},\ d)$ — метричний простір. Якщо $(a_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, то

$$\mathop{+}_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

За означенням ряд є збіжним, якщо існує границя часткових сум, що відповідає означенню збіжності нескінченної операції. □

*Приклад* 1.3 (нескінченний добуток). Розгляньмо множину $G = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ з евклідовою метрикою $d$ та операцію добутку $* := \cdot$. Тоді при $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n \neq 0$

$$\mathop{\cdot}_{n=0}^{\infty} a_n = \prod_{n=0}^{\infty} a_n,$$

тобто в цьому випадку поняття нескінченної операції збігається з поняттям нескінченного добутку, причому збіжність обох понять узгоджена.

□ Справді, $\cdot: \ (\mathbb{R}\setminus\{0\})^2 \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ — бінарна операція, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ d)$ — метричний простір. Якщо $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^{\infty}$, $s_n = a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, причому $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n \neq 0$, то

$$\mathop{\cdot}\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \prod_{n=0}^{\infty} a_n.$$

За означенням нескінченний добуток є збіжним, якщо існує ненульова границя часткових добутків, що відповідає означенню збіжності нескінченної операції, бо у випадку $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \notin \mathbb{R}\setminus\{0\}$ нескінченна операція, як і нескінченний добуток, уважають розбіжними. □

*Приклад* 1.4 (нескінченні об'єднання та перетин). Нехай $(X, G, \mu)$ — простір з мірою (Dorogovcev, 1989), $* \ \in \{\cup,\ \cap\}$ — операція перетину чи об'єднання. Розгляньмо новий простір з мірою $(X, G, \mu)$, у якому замість множини $X$ беремо її фактор-множину за відношенням еквівалентності

$$A = B \Leftrightarrow \mu\,(A \vartriangle B) = 0,$$

замість $G$ — відповідний новий клас підмножин фактор-множини, замість $\mu$ — відповідну нову міру на фактор-множині. Тоді на фактор-множині $X$ можна запровадити метрику $d\,(A, B) = \mu\,(A \vartriangle B)$ та отримати наступні нескінченні операції:

$$\left[\begin{array}{l} \mathop{*}\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n, \\ \mathop{*}\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n. \end{array}\right.$$

□ По-перше, очевидно, що відношення

$$A = B \Leftrightarrow \mu\,(A \vartriangle B) = 0$$

є відношенням еквівалентності (транзитивність випливає із включення

$$A \vartriangle C \subset (A \vartriangle B) \cup (B \vartriangle C)$$

та монотонності міри $\mu$). Отже, маємо право замість самої множини $X$ розглядати її фактор-множину. У класі $G$ кожну множину замінюємо відповідним класом еквівалентності. Природним чином можна означити міру кожного класу еквівалентності, бо міри множин з одного класу рівні між собою. По-друге, рівність

$$d\,(A, B) = \mu\,(A \vartriangle B)$$

справді задає метрику (нерівність трикутника так само випливає з властивостей симетричної різниці та монотонності міри). □

*Зауваження* 1.5. Вищенаведені поняття нескінченних об'єднання та перетину, узагалі кажучи, не узгоджуються із класичними, бо не враховують множини міри нуль.

□ Наведемо тривіальний приклад, коли вищенаведене поняття нескінченного об'єднання не збігається із класичним. У класичному сенсі

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N}.$$

Якщо ж розглянути цей вираз у сенсі нескінченної операції з $G = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (борелівською сигма-алгеброю на прямій), операцією $* := \cup$ та метрикою із прикладу 1.4, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing,$$

бо всі множини $\{1\}, \{2\}, \ldots$ та $\mathbb{N}$ належать класу еквівалентності $\varnothing$. □

*Приклад* 1.6 (нескінченна композиція). Розглянемо клас неперервних функцій $G = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ відносно операції «оберненої» композиції $* := \circ$ (тобто $f \circ g = g(f)$) з рівномірною метрикою $d$. Таким чином можна запровадити нескінченну композицію $\circ_{n=0}^{\infty} f_n$. У цьому випадку збіжність нескінченної операції еквівалентна рівномірній збіжності послідовності $s_n = f_0 \circ f_1 \circ \ldots \circ f_n$ у просторі $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

## 2 Необхідна ознака збіжності нескінченної операції

Сформулюймо необхідну ознаку збіжності вищеозначеної нескінченної операції.

**Теорема 2.1** (необхідна ознака збіжності). *Нехай $(G, *)$ — абелева група з неперервною бінарною операцією та нейтральним елементом $e$. Якщо нескінченна операція $*_{n=0}^{\infty} a_n$ збіжна, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.*

□ Спочатку розгляньмо вираз та перетворімо його, використовуючи асоціативність і комутативність операції $*$ та властивості нейтрального елемента:

$$s_n * (s_{n-1})^{-1} = (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1} * a_n) * (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1})^{-1} =$$

$$= (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1}) * a_n * (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1})^{-1} =$$

$$= a_n * (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1}) * (a_0 * a_1 * \ldots * a_{n-1})^{-1} =$$

$$= a_n * \left(s_{n-1} * (s_{n-1})^{-1}\right) = a_n * e = a_n.$$

Тепер знайдімо границю $a_n$, використавши неперервність операції $*$, а також той факт, що границя обернених дорівнює оберненому границі:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(s_n * {s_{n-1}}^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n * \lim_{n\to\infty} {s_{n-1}}^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n * \left(\lim_{n\to\infty} s_{n-1}\right)^{-1} = a * a^{-1} = e. \qquad \square$$

**Наслідок 2.2** (необхідна ознака збіжності ряду)**.** *Оскільки* $(\mathbb{R}, +)$ *з* $e = 0$ *справджує умови ознаки (тобто є абелевою групою, а операція* $+$ *неперервна), то зі збіжності* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *випливає* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, що є відомим фактом з теорії числових рядів.*

**Наслідок 2.3** (необхідна ознака збіжності нескінченного добутку)**.** *Оскільки* $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ *з* $e = 1$ *справджує умови ознаки (тобто є абелевою групою, а операція* $\cdot$ *неперервна), то зі збіжності* $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *випливає* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$*, що є відомим фактом з теорії нескінченних добутків.*

# 3 Висновки

Запроваджене поняття нескінченної операції дозволяє узагальнити більшість понять та результатів з теорії числових рядів, нескінченних добутків та інших розділів математики, де виникають схожі об'єкти (а саме границі послідовностей деякого спеціального вигляду).

Одним з подальших напрямків розвитку теми цієї статті є формулювання та доведення достатніх умов збіжності (загальних ознак збіжності) нескінченних операцій.

# References


Dorogovcev, A. J. (1989). *Elements of the general theory of measure and integral [in Russian].* Kyiv: Vyshcha shkola.

Ilin, V. A., & Poznyak, J. G. (2005). *Fundamentals of mathematical analysis [in Russian].* Moscow: Fizmatlit.

Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1957). *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Rochester, NY: Graylock Press.

Kurosh, A. G. (1972). *Higher algebra.* Moscow: Mir Publishers.


В. Юськович (2018). Узагальнення понять числового ряду та нескінченного добутку. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 55–60.

*Submitted: 2018-09-30*
*Accepted: 2018-11-07*

V. Yuskovych (2018). Generalization of the notions of a numerical series and infinite product. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 55–60.

**Abstract**. The purpose of this article is generalizing of a series concept, an infinite product concept, and their convergence by defining a new general infinite operation concept which is defined for any metric space and for any binary operation.

The most important special cases of an infinite operation are a series and an infinite product, however, infinite unions, intersections and function compositions are also considered in the article.

The main result of the article is a proof of the general necessary condition of infinite operation convergence which asserts that the terms of a convergent infinite operation limit to the neutral element under certain assumptions.

**Keywords:** binary operation; metric space; convergence.