Mathematics in Modern Technical University

Mathematics in Modern Technical University, 2018(1), 19–31
http://mmtu.matan.kpi.ua

Альтернативна конструкція поверхневої міри у скінченновимірному просторі

Б. М. Сніжко

Кафедра математичних методів системного аналізу,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

dansnow@ukr.net

Анотація

У статті наведено адаптацію одного з альтернативних методів побудови поверхневої міри, розробленого для просторів довільної (скінченної та нескінченної) розмірності, до випадку простору $\mathbb{R}^m$. Альтернативна конструкція базується на понятті фазового потоку автономної задачі Коші, у якій правою частиною є векторне поле, що на поверхні збігається з полем одиничної нормалі до поверхні. Доведено еквівалентність результатів класичного та альтернативного методів побудови поверхневої міри для компактних гладких елементарних поверхонь в $\mathbb{R}^m$, які мають одиничну корозмірність.

Ключові слова: поверхнева міра; скінченновимірний простір; класична конструкція поверхневої міри; гладка елементарна поверхня; кусково гладка поверхня; альтернативна конструкція поверхневої міри; фазовий потік задачі Коші.

MSC2010 46T12, 58C35

УДК 517.518.18+517.98

Cite as: Snizhko, B. M. (2018). Alternative construction of surface measure on a finite-dimensional space. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 19–31.

1 Вступ

Для знаходження міри («площі», «об'єму») поверхні у скінченновимірних просторах використовують класичну конструкцію. Однак відсутність інваріантної міри Лебеґа у нескінченновимірних просторах спонукає дослідників пропонувати інші методи побудови поверхневих мір. Один з таких способів, який далі іменуватиметься «альтернативним», висвітлено в (Bogdanskii, 2013). Наведемо його адаптацію до випадку $(m-1)$-вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^m$ та дослідимо, як отримана поверхнева міра співвідноситься з побудованою класичним методом.

2 Класичний спосіб побудови міри елементарної поверхні

Класичний підхід до побудови поверхневої міри базується на понятті гладкої елементарної (параметризованої) поверхні.

Означення 2.1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^k$ — вимірна за Жорданом множина; відображення $\overrightarrow{r} : D \to \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant k)$ має властивості:

- $\overrightarrow{r}$ — ін'єктивне;
- $\overrightarrow{r} \in C^1(D)$;
- $\operatorname{rang} \overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}) = k \ \forall \overrightarrow{u} \in D$.

За цих умов множину $S := \overrightarrow{r}(D)$ називають *гладкою* k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$.

Якщо $\overrightarrow{r}$ має всі вказані властивості і на $\overline{D}$, то об'єм поверхні S існує і може бути обчислений за формулою (Zorich, 2004):

$$\sigma_1(S) = \int\limits_D \sqrt{\det G_{\overrightarrow{u}}}\mathrm{d}\lambda_k, \tag{1}$$

де

- λ_k — міра Лебеґа в $\mathbb{R}^k$;
- $G_{\overrightarrow{u}} = ((\dot{r}_i(\overrightarrow{u}), \dot{r}_j(\overrightarrow{u})))_{i,j=\overline{1,k}}$ — матриця Ґрама системи векторів

$$\left\{\dot{r}_i(\overrightarrow{u}) := \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u_i}(\overrightarrow{u}) \mid i = \overline{1,k}\right\};$$

  $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$.

3 Альтернативна конструкція поверхневої міри в $\mathbb{R}^m$

Нехай $\overrightarrow{n}$ — векторне поле класу $C^1_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$, де символом $C^1_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ позначено лінійний простір $\{\overrightarrow{Y} \in C^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m) \mid \overrightarrow{Y}$ та $\overrightarrow{Y}'$ є обмеженими на $\mathbb{R}^m\}$. Розгляньмо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{n}(\overrightarrow{x}), \\ \overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0, \end{cases} \tag{2}$$

де $\overrightarrow{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ — шукане невідоме відображення; $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ — початкова умова. За допомогою теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (див., наприклад, (Filippov, 2007)) можна встановити, що для всіх $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ задача (2) має єдиний розв'язок, визначений на всій числовій осі.

Позначмо: $\Phi^{\overrightarrow{n}}_t \overrightarrow{x}_0 = \Phi^{\overrightarrow{n}}(t, \overrightarrow{x}_0)$ — значення в точці $t \in \mathbb{R}$ розв'язку задачі Коші (2) з початковою умовою $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0$. $\Phi^{\overrightarrow{n}}_t$ називають *потоком* векторного поля $\overrightarrow{n}$ (або фазовим потоком).

Надалі для довільної множини $A \subset \mathbb{R}^m$ через $\Phi_t A$ позначатимемо множину $\{\Phi_t \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \in A\}$. Також позначмо:

$$\hat{S}^{\overrightarrow{n}} = \Phi^{\overrightarrow{n}}_{(-\infty,0]} S = \{\Phi^{\overrightarrow{n}}_t \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in S, t \leqslant 0\}.$$

Накладаємо на поле $\overrightarrow{n}$ додаткові умови:

1. $\overrightarrow{n}$ є фінітним, тобто
$$\exists R > 0 : (\|\overrightarrow{x}\| > R) \Rightarrow (\overrightarrow{n}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0});$$
2. $\overrightarrow{n}|_S$ є полем одиничної нормалі до S.

Міру поверхні S в альтернативному підході задамо формулою

$$\sigma_2(S) := \frac{d}{dt}|_{t=0} \lambda_m(\Phi^{\overrightarrow{n}}_t \hat{S}^{\overrightarrow{n}}). \tag{3}$$

4 Еквівалентність класичного та альтернативного підходів до побудови поверхневої міри

Теорема 4.1. *(теорема Ліувіля) (Fedoriuk, 1985). Для всіх вимірних за Лебеґом множин $A \subset \mathbb{R}^m$ правдива формула:*

$$\frac{d}{dt}\lambda_m(\Phi^{\overrightarrow{n}}_t A) = \int\limits_{\Phi^{\overrightarrow{n}}_t A} \operatorname{div} \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Теорема 4.2. *Нехай $\overrightarrow{r} : U \to \mathbb{R}^m$, U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{m-1}$; $\overrightarrow{r} \in C^1(U)$, $\operatorname{rang}(\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u})) = m-1\ \forall \overrightarrow{u} \in U$; D — компакт в $\mathbb{R}^{m-1}$ з межею ∂D, що є кусково гладкою $(m-2)$-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^{m-1}$; $D \subset U$. Нехай також $\overrightarrow{r}$ є ін'єктивним відображенням на U.*

Нехай $\overrightarrow{Z} \in C^1_b(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ — векторне поле, яке справджує умови:

1. *$\overrightarrow{Z}$ є фінітним;*

2. *$\overrightarrow{Z}|_S$ є полем одиничної нормалі до S.*

Тоді виконано рівність:

$$\sigma_1(S) = \sigma_2(S),$$

де:

- *$S := \overrightarrow{r}(D)$;*

- *$\sigma_1(S)$ — поверхнева міра S, побудована класичним методом (див. формулу (1));*

- *$\sigma_2(S)$ — поверхнева міра S, сконструйована згідно з альтернативним підходом (за формулою (3) з підстановкою поля $\overrightarrow{Z}$ замість $\overrightarrow{n}$).*

Доведенню теореми 4.2 передуватимуть необхідні теоретичні міркування.

Оскільки відображення $\overrightarrow{r}$ є неперервним на U, то воно переводить компакти в компакти. Отже, S — компакт в $\mathbb{R}^m$.

Можна довести наступний факт, що є аналогом пункту 1 теореми 1 роботи (Bogdanskii & Moravetskaya, 2018).

Твердження 4.3. *Існує таке число $\hat{\tau} > 0$, що відображення $\Phi^{\overrightarrow{Z}} : \langle t, \overrightarrow{x} \rangle \mapsto \Phi_t^{\overrightarrow{Z}} \overrightarrow{x}$ є взаємно однозначним на $(-\hat{\tau}; \hat{\tau}) \times S$, тобто:*

$$\left(t, \tau \in (-\hat{\tau}, \hat{\tau}); \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in S; \Phi_t^{\overrightarrow{Z}} \overrightarrow{x} = \Phi_\tau^{\overrightarrow{Z}} \overrightarrow{y}\right) \Rightarrow (t = \tau, \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}).$$

Надалі для позначення відображення $\Phi^{\overrightarrow{Z}}$ використовуватимемо короткий запис Φ.

Візьмімо довільне число $\tau^* \in (-\hat{\tau}, 0)$. Розгляньмо множину

$$G := \Phi_{(\tau^*;0]} S = \{\Phi_t \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in S, t \in (\tau^*; 0]\}.$$

Лема 4.4. *Нехай $S^0 := \overrightarrow{r}(\operatorname{int} D)$. Тоді:*

$$\operatorname{int} G \supset \Phi_{(\tau^*,0)} S^0.$$

Доведення. Вибираємо довільну точку $\overrightarrow{y} \in \Phi_{(\tau^*,0)}S^0$. Розгляньмо D як метричний підпростір $\mathbb{R}^{m-1}$, а також розгляньмо S як метричний підпростір $\mathbb{R}^m$. Відображення $\overrightarrow{r} : D \to S$ є неперервним та взаємно однозначним. Оскільки D — компакт в $\mathbb{R}^{m-1}$, то відображення $\overrightarrow{r}^{-1} : S \to D$ також є неперервним. Отже, $\overrightarrow{r} : D \to S$ є гомеоморфізмом. Гомеоморфізм переводить відкриті множини у відкриті. Отже, S^0 — відкрита множина (відносно метричного простору S). Отримали, що $(\tau^*, 0) \times S^0$ — відкрита множина в метричному просторі $[\tau^*, 0] \times S$.

Відображення

$$\Phi : [\tau^*, 0] \times S \ni \langle \tau, \overrightarrow{a} \rangle \mapsto \Phi_\tau \overrightarrow{a} \in \Phi_{[\tau^*,0]}S$$

є неперервним та взаємно однозначним. Крім того, $[\tau^*, 0] \times S$ — компакт. Отримуємо, що Φ є гомеоморфізмом. Тому $\Phi_{(\tau^*,0)}S^0$ — відкрита множина в $\Phi_{[\tau^*,0]}S$. Крім того, ця множина містить точку $\overrightarrow{y}$. Отже, $\Phi_{(\tau^*,0)}S^0$ є відкритим околом точки $\overrightarrow{y}$, разом з яким ця точка входить до $G = \Phi_{(\tau^*,0]}S$. Отже, $\overrightarrow{y} \in \operatorname{int} G$. □

Твердження 4.5. *Межу множини G можна представити формулою:*

$$\partial G = S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S, \tag{4}$$

де $\Gamma := \overrightarrow{r}(\partial D)$.

Доведення. 1. Покажемо, що множини S, $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$ та $\Phi_{\tau^*}S$ попарно не перетинаються (тому маємо право писати їх диз'юнктне об'єднання).

Розгляньмо множини S і $\Phi_{\tau^*}S$. Припускаємо, що $S \cap \Phi_{\tau^*}S \neq \varnothing$. Берімо довільну точку $\overrightarrow{x} \in S \cap \Phi_{\tau^*}S$. $\exists \overrightarrow{y} \in S$: $\overrightarrow{x} = \Phi_{\tau^*}\overrightarrow{y}$. Маємо: $\Phi_{\tau^*}\overrightarrow{y} = \Phi_0\overrightarrow{x}$. Тоді твердження 4.3 дає змогу висновувати, що $\tau^* = 0$. А це суперечить тому, що $\tau^* < 0$. Отже, $S \cap \Phi_{\tau^*}S = \varnothing$.

Візьмімо множини та S та $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$. Припускаємо, що $S \cap \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \neq \varnothing$. Фіксуємо довільну точку $\overrightarrow{x} \in S \cap \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$. Існують $t \in (\tau^*, 0)$ та $\overrightarrow{y} \in \Gamma$ такі, що $\overrightarrow{x} = \Phi_t\overrightarrow{y}$. Оскільки множина параметрів D є замкненою, то $\partial D \subset D$, а тому й $\Gamma = \overrightarrow{r}(\partial D) \subset \overrightarrow{r}(D) = S$. Отже, $t, 0 \in [\tau^*; 0]$, $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in S$, $\Phi_0\overrightarrow{x} = \Phi_t\overrightarrow{y}$. Знову за твердженням 4.3 отримуємо, що $t = 0$. Суперечність із тим, що $t < 0$. Отже, $S \cap \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma = \varnothing$.

Лишилося розглянути множини $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$ і $\Phi_{\tau^*}S$. Цілком аналогічно до попередніх випадків, за допомогою твердження 4.3 доводимо, що $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \cap \Phi_{\tau^*}S = \varnothing$.

2. Доведімо, що $\partial G \subset S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S$. Зручніше показати, що правдиве еквівалентне твердження, а саме: $\operatorname{int} G \supset \overline{G} \setminus \big(S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S\big)$. Тут використано рівність $\overline{G} = \operatorname{int} G \vee \partial G$. Можна довести, що $\overline{G} = \Phi_{[\tau^*,0]}S$. Тому, з урахуванням взаємної однозначності Φ на $[\tau^*, 0] \times S$, маємо

$$\overline{G} \setminus \big(S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S\big) = \Phi_{(\tau^*,0)}S \setminus \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma.$$

За лемою 4.4, $\operatorname{int} G \supset \Phi_{(\tau^*,0)}S^0$. Отже, для завершення кроку 2 достатньо показати, що $\Phi_{(\tau^*,0)}S \setminus \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \subset \Phi_{(\tau^*,0)}S^0$. Беремо точку $\overrightarrow{y} \in \Phi_{(\tau^*,0)}S \setminus$ $\setminus \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$. Тоді

$$\exists t \in (\tau^*, 0), \exists \overrightarrow{x} \in S : \overrightarrow{y} = \Phi_t \overrightarrow{x}.$$

Однак $\overrightarrow{x} \notin \Gamma = \overrightarrow{r}(\partial D)$. Оскільки

$$S = \overrightarrow{r}(D) = \overrightarrow{r}(\operatorname{int} D \vee \partial D) = \overrightarrow{r}(\operatorname{int} D) \cup \overrightarrow{r}(\partial D),$$

то $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{r}(\operatorname{int} D) = S^0$. А це й означає, що $\overrightarrow{y} \in \Phi_{(\tau^*,0)}S^0$.

3. Доведімо, що $\partial G \supset S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S$. Для цього достатньо показати, що кожна із множин S, $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$, $\Phi_{\tau^*}S$ вкладена у ∂G.

   - Перевірмо вкладення $S \subset \partial G$. Візьмімо довільну точку $\overrightarrow{x} \in S$. За еквівалентним означенням межі множини, потрібно показати, що в кожному околі точки $\overrightarrow{x}$ містяться і точки з G, і точки з G^c. Точка $\overrightarrow{x}$ сама належить G, адже $S \subset G = \Phi_{(\tau^*,0]}S$. Тому візьмімо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що в $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ є точки із G^c. З неперервності відображення $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що

     $$(t \in (0, \delta]) \Rightarrow (\|\Phi_t \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\| < \varepsilon).$$

     Зменшимо δ (за потреби) так, щоб виконувалося $\delta \in (0, \hat{\tau})$. Отже, $\Phi_\delta \overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$. Але відображення Φ є бієктивним на $(-\hat{\tau}; \hat{\tau}) \times S$, тому $\Phi_\delta \overrightarrow{x} \notin G$. Отже, $\overrightarrow{x} \in \partial G$.

   - Доведімо вкладення $\Phi_{\tau^*}S \subset \partial G$. Фіксуємо будь-яку точку $\overrightarrow{y} \in \Phi_{\tau^*}S$. Візьмімо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\Phi_{\tau^*}S \subset \overline{G} = \Phi_{[\tau^*,0]}S$, то $\exists \overrightarrow{a} \in$ $\in G \cap B(\overrightarrow{y}, \varepsilon)$. Тепер покажемо, що в $B(\overrightarrow{y}, \varepsilon)$ є точки з G^c. $\exists \overrightarrow{x} \in S$: $\overrightarrow{y} = \Phi_{\tau^*} \overrightarrow{x}$. Неперервність відображення $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ гарантує існування такого $\delta > 0$, що

     $$(t \in [\tau^* - \delta, \tau^*)) \Rightarrow (\|\Phi_{\tau^*} \overrightarrow{x} - \Phi_t \overrightarrow{x}\| < \varepsilon).$$

     Зменшимо δ (за потреби) так, щоб було виконано $\tau^* - \delta > -\hat{\tau}$. Маємо: $\Phi_{\tau^*-\delta} \overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{y}, \varepsilon)$. А оскільки відображення Φ є взаємно однозначним на $(-\hat{\tau}; \hat{\tau}) \times S$, то $\Phi_{\tau^*-\delta} \overrightarrow{x} \notin G$. Отже, $\overrightarrow{y} \in \partial G$.

   - Можна також довести, що $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \subset \partial G$.

□

Твердження 4.6. *∂G є кусково гладкою $(m-1)$-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^m$.*

Доведення. Згідно з формулою (4) та означенням кусково гладкої поверхні, достатньо показати, що S та $\Phi_{\tau^*}S$ є гладкими $(m-1)$-вимірними поверхнями, а $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$ є кусково гладкою $(m-1)$-вимірною поверхнею. S взагалі є елементарною поверхнею і параметризується гладким відображенням $\overrightarrow{r}$. $\Phi_{\tau^*}\circ\overrightarrow{r}: D\to$ $\to\mathbb{R}^m$ є параметризацією поверхні $\Phi_{\tau^*}S$, тому $\Phi_{\tau^*}S$ є гладкою $(m-1)$-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. ∂D, згідно з умовою теореми 4.2, є кусково гладкою $(m-2)$-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^{m-1}$. Тому якщо $\{\overrightarrow{\psi}_i(\cdot)\}$ — параметризації гладких поверхонь в $\mathbb{R}^{m-1}$, на які розпадається ∂D, то $\{\Phi\left(\cdot,\overrightarrow{r}\circ\overrightarrow{\psi}_i(\cdot)\right)\}$ — параметризації гладких поверхонь в $\mathbb{R}^m$, на які розпадається $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$. Тобто $\Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma$ є кусково гладкою $(m-1)$-вимірною поверхнею. □

Твердження 4.6 дозволяє до множини G застосовувати формулу Ґауса–Остроградсько

Розгляньмо функцію $T:\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S\to\mathbb{R}$ за таким правилом: T ставить у відповідність кожній точці $\overrightarrow{y}\in\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$ таке $t\in(-\hat{\tau},\hat{\tau})$, що $\Phi_{-t}\overrightarrow{y}\in S$. Потрібно перевірити коректність задання функції T.

- Покажімо, що для кожного $\overrightarrow{y}\in\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$ існує $T(\overrightarrow{y})$. Беремо довільну точку $\overrightarrow{y}\in\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$. Тоді $\exists\overrightarrow{x}\in S$, $\exists\tau\in(-\hat{\tau},\hat{\tau})$: $\overrightarrow{y}=\Phi_\tau\overrightarrow{x}$. Водночас $\Phi_{-\tau}\overrightarrow{y}=$ $=\Phi_{-\tau+\tau}\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}\in S$. Тому за $T(\overrightarrow{y})$ можна взяти τ.

- Перевірмо, що $T(\overrightarrow{y})$ є єдиним для кожного $\overrightarrow{y}\in\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$. Нехай $\overrightarrow{y}\in$ $\in\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$. Припустімо, $\exists t_1,t_2\in(-\hat{\tau},\hat{\tau})$: $\Phi_{-t_1}\overrightarrow{y}\in S$ та $\Phi_{-t_2}\overrightarrow{y}\in S$. Позначаємо: $\overrightarrow{x}_1=\Phi_{-t_1}\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{x}_2=\Phi_{-t_2}\overrightarrow{y}$. Тоді $\overrightarrow{y}=\Phi_{t_1}\overrightarrow{x}_1=\Phi_{t_2}\overrightarrow{x}_2$. Але, за твердженням 4.3, із цього випливає рівність $t_1=t_2$. Отже, $T(\overrightarrow{y})=t_1=t_2$.

Отже, функція $T:\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S\to\mathbb{R}$ задано коректно. Виявляється, що вона є також неперервно диференційовною. Доведімо це, спираючись на теорему про неявну функцію.

Розгляньмо відображення $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, визначене за правилом:

$$\overrightarrow{F}:\langle t,\overrightarrow{u},\overrightarrow{y}\rangle\mapsto\Phi(-t,\overrightarrow{y})-\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}).$$

Зауважмо, що множина $\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}^m$ є відкритою в $\mathbb{R}^{2m}$; $\overrightarrow{F}\in C^1(\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}^m)$. Беремо довільну точку $\langle t_0,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{y}_0\rangle\in\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}^m$ таку, що $\overrightarrow{y}_0=\Phi(t_0,\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0))$. Виконано рівність $\overrightarrow{F}(t_0,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{y}_0)=\overrightarrow{0}$. Розгляньмо матрицю $\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\langle t,\overrightarrow{u}\rangle}(t_0,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{y}_0)$.

$$\forall i=\overline{1,m}:\frac{\partial F_i}{\partial t}(t_0,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{y}_0)=-\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}(-t_0,\overrightarrow{y}_0)-0=-Z_i(\Phi(-t_0,\overrightarrow{y}_0))=-Z_i(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)).$$

$$\forall i=\overline{1,m},\forall j=\overline{1,m-1}:\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(t_0,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{y}_0)=0-\frac{\partial r_i}{\partial u_j}(\overrightarrow{u}_0)=-\frac{\partial r_i}{\partial u_j}(\overrightarrow{u}_0).$$

Отже,

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \langle t, \overrightarrow{u} \rangle}(t_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{y}_0) = \begin{pmatrix} -Z_1(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)) & -\frac{\partial r_1}{\partial u_1}(\overrightarrow{u}_0) & \dots & -\frac{\partial r_1}{\partial u_{m-1}}(\overrightarrow{u}_0) \\ -Z_2(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)) & -\frac{\partial r_2}{\partial u_1}(\overrightarrow{u}_0) & \dots & -\frac{\partial r_2}{\partial u_{m-1}}(\overrightarrow{u}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Z_m(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)) & -\frac{\partial r_m}{\partial u_1}(\overrightarrow{u}_0) & \dots & -\frac{\partial r_m}{\partial u_{m-1}}(\overrightarrow{u}_0) \end{pmatrix} =$$

$$- \left(\overrightarrow{Z}(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)) \ \vdots \ \overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}_0) \right).$$

Тут $\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}_0)$ — матриця Якобі відображення $\overrightarrow{r}'$ у точці $\overrightarrow{u}_0$. Відомо, що $\operatorname{rang} \overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}_0) = m-1$, тобто матриця $\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}_0)$ має максимально можливий ранг. Тому стовпці матриці $\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{u}_0)$ є лінійно незалежними. Крім того,

$$\overrightarrow{Z}(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)) \perp \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u_j}(\overrightarrow{u}_0), j = \overline{1, m-1}.$$

Тому система векторів

$$\left\{ \overrightarrow{Z}(\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}_0)), \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u_1}(\overrightarrow{u}_0), \dots, \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u_{m-1}}(\overrightarrow{u}_0) \right\}$$

теж є лінійно незалежною. Отже, матриця $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \langle t, \overrightarrow{u} \rangle}(t_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{y}_0)$ є невиродженою.

Усі умови теореми про неявну функцію виконані. Тому існують V — окіл точки $\langle t_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{y}_0 \rangle$ в $\mathbb{R}^{2m}$ ($V \subset \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^m$); W — окіл точки $\overrightarrow{y}_0$ в $\mathbb{R}^m$; відображення $\overrightarrow{f} : W \to \mathbb{R}^m$ класу $C^1(W)$ такі, що рівняння $\overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}$ в V еквівалентне рівнянню $\langle t, \overrightarrow{u} \rangle = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})$. А відтак, перша компонента $f_1(\cdot) = T(\cdot)$ відображення $\overrightarrow{f}$ є функцією класу $C^1(W)$, що й потрібно було отримати.

Для подальших міркувань нам буде потрібно замінити початкове поле $\overrightarrow{Z}$ на інше поле $\overrightarrow{n}$, яке також належатиме класу $C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$, буде фінітним та на S збігатиметься з полем одиничної нормалі до S, але, крім того, матиме інші корисні для нас властивості.

Розгляньмо функцію $h_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h_+(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}.$$

Очевидно, що $h_+(t) \in (0; 1)$ при $t > 0$. У всіх точках числової осі, окрім 0, нескінченна неперервна диференційовність функції h_+ не викликає сумнівів. Однак неважко показати (див., наприклад, (Conlon, 2008)), що й у нулі функція гладка, тобто $h_+ \in C^\infty(\mathbb{R})$. Розгляньмо також функцію $h_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h_-(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t < 0 \\ 0, & t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Аналогічно, $h_-(t) \in (0;1)$ при $t < 0$, а також $h_- \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Розгляньмо функцію $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яку задано формулою

$$k(t) = h_-\left(t - \frac{\tau^*}{2}\right) \cdot h_+(t - \tau^*)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тобто

$$k(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(t-b)^2} - \frac{1}{(t-a)^2}\right), & t \in \left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right) \\ 0, & t \leqslant \tau^* \text{ або } t \geqslant \frac{\tau^*}{2} \end{cases}.$$

Помічаємо, що $k(t) \in (0;1)$ при $t \in \left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right)$. Функція k належить класу $C^\infty(\mathbb{R})$, оскільки є добутком двох функцій класу $C^\infty(\mathbb{R})$.

Розгляньмо функцію $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$l(t) = \left(\int\limits_{\tau^*}^{t} k(\xi)\mathrm{d}\xi\right) / \left(\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*/2} k(\xi)\mathrm{d}\xi\right) \forall t \in \mathbb{R}.$$

Перевірмо коректність задання l, а саме: покажімо, що $\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*/2} k(\xi)\mathrm{d}\xi \neq 0$. Це випливає з того, що $l(\cdot)$ є неперервною і строго додатною функцією на $\left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right)$. Отже, $\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*/2} k(\xi)\mathrm{d}\xi > 0$.

l є зростаючою функцією на $\left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right)$. Справді,

$$l'(t) = k(t)/\left(\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*/2} k(\xi)\mathrm{d}\xi\right) = \exp\left(-\frac{1}{(t-b)^2} - \frac{1}{(t-a)^2}\right) / \left(\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*/2} k(\xi)\mathrm{d}\xi\right) > 0$$

при $t \in \left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right)$. Крім того,

$$\left(t \geqslant \frac{\tau^*}{2}\right) \Rightarrow (l(t) = 1); (t \leqslant \tau^*) \Rightarrow (l(t) = 0).$$

Важливим є і такий факт: $l \in C^\infty(\mathbb{R})$. Це пояснюється тим, що $l'(t) = \mathrm{const} \cdot k(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ і $k \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Задаємо функцію $\eta : \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S \to \mathbb{R}$ так: $\eta(\overrightarrow{x}) = l(T(\overrightarrow{x}))$ для всіх $\overrightarrow{x} \in \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$. Оскільки $l \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $T \in C^1(\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S)$, то $\eta = l \circ T \in C^1(\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S)$. Побудуймо векторне поле $\overrightarrow{n} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ за схемою:

- якщо $\overrightarrow{x} \in \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$, то покладаємо $\overrightarrow{n}(\overrightarrow{x}) = \eta(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{Z}(\overrightarrow{x})$;
- продовжуємо $\overrightarrow{n}$ на $\mathbb{R}^m$ так, щоб було виконано $\overrightarrow{n} \in C_b^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ і поле $\overrightarrow{n}$ було фінітним.

Зауважмо, що $\overrightarrow{n}|_S = \overrightarrow{Z}|_S$, тому $\overrightarrow{n}$, як і $\overrightarrow{Z}$, на S є полем одиничної нормалі до S. Крім того, оскільки поля $\overrightarrow{n}$ та $\overrightarrow{Z}$ збігаються не тільки на S, а й на $\Phi_{[\tau^*/2,\hat{\tau})}S$, то поверхнева міра S, побудована згідно з альтернативним підходом, не зміниться від заміни поля $\overrightarrow{Z}$ на $\overrightarrow{n}$. Мається на увазі, що

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\lambda_m(\Phi_t^{\overrightarrow{Z}}\hat{S}^{\overrightarrow{Z}}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\lambda_m(\Phi_t^{\overrightarrow{n}}\hat{S}^{\overrightarrow{n}}), \tag{5}$$

Фіксуємо будь-яку точку $\overrightarrow{x}_0 \in S$ та розгляньмо дві задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{Z}(\overrightarrow{x}), \\ \overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{n}(\overrightarrow{x}), \\ \overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0. \end{cases} \tag{7}$$

$\Phi_t^{\overrightarrow{Z}}\overrightarrow{x}_0$ — розв'язок задачі (6) на $\mathbb{R}$; $\Phi_t^{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{x}_0$ — розв'язок задачі (7) на $\mathbb{R}$. При $\overrightarrow{y} \in \Phi^{\overrightarrow{Z}}_{(\tau^*,0]}S$ вектори $\overrightarrow{Z}(\overrightarrow{y})$ та $\overrightarrow{n}(\overrightarrow{y})$ є колінеарними, тобто визначають однаковий напрям, але, можливо, відрізняються за нормою. Тому фазова траєкторія задачі (6) на $(\tau^*,0]$ збігається з фазовою траєкторією задачі (7) на $(-\infty,0]$, хоча швидкість руху цими траєкторіями, узагалі кажучи, різна. Отже, $\Phi^{\overrightarrow{Z}}_{(\tau^*,0]}\overrightarrow{x}_0 = \Phi^{\overrightarrow{n}}_{(-\infty,0]}\overrightarrow{x}_0$. І так — для кожної точки $\overrightarrow{x}_0 \in S$. Тому $\Phi^{\overrightarrow{Z}}_{(\tau^*,0]}S = \Phi^{\overrightarrow{n}}_{(-\infty,0]}S$. Нагадаємо, що множину $\Phi^{\overrightarrow{Z}}_{(\tau^*,0]}S$ ми позначали через G, а множину $\Phi^{\overrightarrow{n}}_{(-\infty,0]}S$ — через $\hat{S}^{\overrightarrow{n}}$.

Підготовча робота для доведення основного результату (теореми 4.2) завершена.

Доведення. З теореми 4.1 випливає, що

$$\sigma_2(S) = \int\limits_{\hat{S}^{\overrightarrow{Z}}} \operatorname{div}\overrightarrow{Z}\,\mathrm{d}\lambda_m,$$

оскільки

$$\sigma_2(S) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\lambda_m\left(\Phi_t^{\overrightarrow{Z}}\hat{S}^{\overrightarrow{Z}}\right)$$

та $\Phi_0^{\overrightarrow{Z}}\hat{S}^{\overrightarrow{Z}} = \hat{S}^{\overrightarrow{Z}}$. А в силу (5) маємо:

$$\sigma_2(S) = \int\limits_{\hat{S}^{\overrightarrow{n}}} \operatorname{div} \overrightarrow{n} \mathrm{d}\lambda_m.$$

Тепер використаємо рівність $\hat{S}^{\overrightarrow{n}} = G$ й отримаємо

$$\sigma_2(S) = \int\limits_{G} \operatorname{div} \overrightarrow{n} \mathrm{d}\lambda_m.$$

З іншого боку, за формулою Ґауса —Остроградського,

$$\int\limits_{G} \operatorname{div} \overrightarrow{n} \mathrm{d}\lambda_m = \int\limits_{\partial G} (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1,$$

де $\overrightarrow{n}_{\partial G}$ — поле одиничної зовнішньої нормалі до ∂G. Зауважмо, що $\overrightarrow{n} = \eta \cdot \overrightarrow{Z}$ на $\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}^{\overrightarrow{Z}} S$ і

$$\partial G = S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}^{\overrightarrow{Z}} \Gamma \vee \Phi_{\tau^*}^{\overrightarrow{Z}} S \subset \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}^{\overrightarrow{Z}} S.$$

Тому

$$\int\limits_{\partial G} (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = \int\limits_{\partial G} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1.$$

Отже, щоб довести еквівалентність підходів, достатньо показати, що

$$\int\limits_{\partial G} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = \sigma_1(S).$$

Адитивність інтеграла за мірою дозволяє отримати рівність:

$$\int\limits_{\partial G} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = \int\limits_{S} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 + \int\limits_{\Phi_{(\tau^*,0)}^{\overrightarrow{Z}} \Gamma} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 + \int\limits_{\Phi_{\tau^*}^{\overrightarrow{Z}} S} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1.$$

Інтеграл

$$\int\limits_{\Phi_{\tau^*}^{\overrightarrow{Z}} S} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = 0,$$

оскільки $\eta = 0$ на $\Phi_{\tau^*}^{\overrightarrow{Z}} S$, а отже, і вся підінтегральна функція нульова. Крім того,

$$\int\limits_{\Phi_{(\tau^*,0)}^{\overrightarrow{Z}} \Gamma} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = 0,$$

оскільки при $\overrightarrow{x} \in \Phi^{\overrightarrow{Z}}_{(\tau^*,0)}\Gamma$ вектори $\overrightarrow{Z}(\overrightarrow{x})$ та $\overrightarrow{n}_{\partial G}(\overrightarrow{x})$ ортогональні, тобто

$$(\overrightarrow{Z}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{n}_{\partial G}(\overrightarrow{x})) = 0.$$

Водночас на S векторні поля $\overrightarrow{n} = \eta \cdot \overrightarrow{Z} = 1 \cdot \overrightarrow{Z}$ та $\overrightarrow{n}_{\partial G}$ збігаються і в кожній точці мають одиничну норму. Отже,

$$\int\limits_{\partial G} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = \int\limits_{S} \eta(\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{n}_{\partial G}) \mathrm{d}\sigma_1 = \int\limits_{S} 1 \mathrm{d}\sigma_1 = \sigma_1(S).$$

Отже, бажана рівність $\sigma_1(S) = \sigma_2(S)$ отримана. □

5 Висновки

Отже, у статті наведено одну з альтернативних конструкцій поверхневої міри у скінченновимірному просторі та доведено її еквівалентність із класичним методом побудови поверхневої міри для випадку компактних гладких $(m-1)$-вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^m$.

References

Bogdanskii, Y. V. (2013). Banach manifolds with bounded structure and the Gauss–Ostrogradskii formula. *Ukrainian Mathematical Journal*, *64*(10), 1475–1494. https://doi.org/10.1007/s11253-013-0730-9

Bogdanskii, Y. V., & Moravetskaya, E. V. (2018). Surface measures on Banach manifolds with uniform structure. *Ukrainian Mathematical Journal*, *69*(8), 1196–1219. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1425-4

Conlon, L. (2008). *Differentiable manifolds.* Basel: Birkhauser.

Fedoriuk, M. V. (1985). *Ordinary differential equations [in Russian].* Moscow: Nauka.

Filippov, A. F. (2007). *An introduction to differential equations [in Russian].* Moscow: KomKniga.

Zorich, V. A. (2004). *Mathematical analysis II.* Berlin: Springer.

Б. М. Сніжко (2018). Альтернативна конструкція поверхневої міри у скінченновимірному просторі. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 19–31.

Submitted: 2018-07-25
Accepted: 2018-09-05

B. M. Snizhko (2018). Alternative construction of surface measure on a finite-dimensional space. *Mathematics in Modern Technical University*, 2018(1), 19–31.

Abstract. To find surface measure in finite-dimensional spaces, the classical construction is used. However, the absence of an invariant Lebesgue measure in infinite-dimensional spaces prompts researchers to propose other methods of constructing surface measures. One of these methods, which will be referred to as the alternative, was proposed by Yuriy Bogdanskiy for spaces of an arbitrary (finite and infinite) dimension. An adaptation of this method for constructing surface measure, in the case of the space $\mathbb{R}^m$, is presented in the article. The alternative construction is based on the concept of the phase flow of the autonomous Cauchy problem, in which the right side is a vector field that coincides with the field of the unit normal to the surface on the surface. Equivalence of the results of the classical and alternative methods for constructing surface measure for compact smooth elementary surfaces in $\mathbb{R}^m$ that have unit codimension is proved. In the research, modern instruments of mathematical analysis, ordinary differential equations theory and differential geometry were used. Future investigations may apply to analysis of equivalence of classical and alternative methods for surfaces with arbitrary finite codimension.

Keywords: surface measure; finite-dimensional space; classical construction of surface measure; smooth elementary surface; sectionally smooth surface; alternative construction of surface measure; phase flow of Cauchy problem.